

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ОТ АВТОРОВ	7

	Задачи	Ответы и решения
I. МЕХАНИКА	9	72
II. ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА	17	90
III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ	26	109
IV. ОПТИКА	42	134
V. АТОМНАЯ ФИЗИКА	51	147
VI. ИЗЛУЧЕНИЕ	58	158
VII. ТВЕРДОЕ ТЕЛО	59	160
VIII. ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА	65	172

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. КОНСТАНТЫ И ТАБЛИЦЫ	182
II. НЕКОТОРЫЕ ВНЕСИСТЕМНЫЕ ЕДИНИЦЫ	184
III. ЕДИНИЦЫ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В СИСТЕМАХ СИ И СГС И СО- ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НИМИ	185
IV. ТАБЛИЦА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ	187
V. ПРИСТАВКИ И МНОЖИТЕЛИ ДЛЯ ОБРА- ЗОВАНИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ КРАТНЫХ И ДОЛЬНЫХ ЕДИНИЦ И ИХ НАИМЕНОВА- НИЯ	189
ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ	190

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сказки помогают детям познать мир взрослых, задачи же служат аналогичной цели при знакомстве студента с физикой. Действительно, у задач много общего с фольклором. Так же как и сказки, задачи дают студенту первое представление о мире физическом, о методах его описания и путях познания. Элементарные задачи описывают условный мир точечных масс, невесомых нитей, идеальных газов и других совершенных тел, подобный сказочному миру, населенному свирепыми змиями и прекрасными принцами, путешествующими на коврах-самолетах в поисках жар-птиц. В таком мире силы добра и зла четко очерчены и нравственные проблемы отличаются ясностью и однозначностью ответа. В задачах мы также можем рассматривать условия малореальные, даже фантастические; так же как сказки, такие задачи развивают наше воображение. Более продвинутые задачи постепенно приближают нас к сложной картине реального научного поиска, где многие вопросы требуют значительного труда даже для их формулировки, и, наконец, более глубокое исследование часто приводит к расширению наших представлений и дает возможность по-новому осмыслить проблему, поставленную вначале. Так и с задачами в этом сборнике: часто более углубленное рассмотрение потребует либо новых расчетов, либо может послужить поводом к более серьезным размышлениям.

У задач есть еще одно сходство с фольклором. Это вопрос о том, кто автор задачи. На это редко можно дать точный ответ, а в таких установившихся разделах, как механика, особенно много традиционных сюжетов, которые каждое поколение аранжирует на свой лад. Большинство представленных задач извлечено из архива Московского физико-технического института. Составители задачника профессора С. М. Козел, Э. И. Раиба и С. А. Славатинский проделали большую работу, впервые систематически обработав и отредактировав этот обширный материал: до сих пор в литературу попадали лишь отдельные задачи. При редактировании задач и решений

составителям удалось сохранить тот живой и непосредственный подход к задачам, который, быть может, характерен для современного стиля мышления работающих физиков-исследователей.

Задачник МФТИ своей связью с физикой наших дней передает то, что мы отождествляем с «Системой Физтеха». По этой системе активно работающие ученые принимают непосредственное участие в воспитании и подготовке следующего поколения исследователей и инженеров. Эта прямая связь особенно важна в преподавании фундаментальных естественнонаучных дисциплин, из которых физика и математика являются главными. При этом сокращается разрыв между специальной и общей подготовкой и исключается то запаздывание в требованиях и подходе, которое возникает тогда, когда дело преподавания общих курсов передается исключительно профессиональным педагогам. Таким образом, этот задачник продолжает традиции преподавания физики, которые были заложены при основании МФТИ академиками П. Л. Капицей и Л. Д. Ландау. Хорошо известны как оригинальные задачи П. Л. Капицы, опубликованные в ряде изданий, так и то место, которое задачи занимают в Курсе теоретической физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица.

Уровень задач в известных пределах отвечает тем требованиям, которые ставит перед студентами курс общей физики МФТИ. В гораздо большей мере, чем программы, задачи могут служить мериллом уровня требований и их можно рассматривать как реальную, в операционном смысле, меру этих требований. Поэтому не случайно, что многие задачи возникли на основе Заключительного экзамена, которым завершается общий курс физики в МФТИ. Заключительный экзамен принимается авторитетными комиссиями, в которые входят физики со всех основных специальных кафедр и базовых институтов МФТИ. Экзамен состоит из письменного решения задач и доклада реферата на избранную студентом тему. Задачи, предлагаемые на этом экзамене, часто построены так, что охватывают сразу несколько разделов физики. При решении задач студенты должны проявить знание общей физики, т. е. умение идеализации явления, применение законов сохранения, условий симметрии и инвариантности, принципов подобия, выделение безразмерных параметров, осмысливание результатов при переходе к предельным условиям. Другое требование, которое мы постоянно выдвигаем перед студентами — это необходимость доводить дело до числа, давать численный ответ. При этом важно, чтобы те числа, которые будут фигурировать, также имели не только реальный смысл, но были бы полезны и помогали студенту накапливать нужные данные в своей памяти.

В еще большей мере, чем содержание курса, новые задачи отражают время и обстоятельства их создания. Действительно, буквально каждый значительный шаг в физике мы можем и, наверное, должны отражать в задачах, если мы хотим в преподавании поспеть за быстро текущим развитием научной мысли. Неисчерпаемым источником тем и вдохновения для задач по общей физике могут служить два наиболее активных участка фундаментальных исследований: физика космоса и астрофизика, с одной стороны, и физика элементарных частиц — с другой. Многолетняя практика человечества в познании явлений природы учит, что наиболее важные фундаментальные свойства вещества проявляются в предельных формах его существования. Именно экстремальные условия природы дают исключительный простор творческому воображению и служат ареной для оценок и выводов, основанных на прямом и часто очень поучительном применении основных законов физики. Поэтому можно надеяться, что некоторые задачи послужат основой для более подробного разбора на семинаре при развитии решений, данных составителями.

В заключение хотелось бы призвать как преподавателей, так еще в большей степени студентов к тому, чтобы искать и придумывать задачи самим. При современной, несколько прагматичной направленности образования, вернее, способа обучения, решению готовых задач уделяется большое внимание. Но очень важно, чтобы при необходимом приобретении навыков решения задач, в которых мы видим зародыши научной работы, не происходило торможения воображения и не подавлялась бы творческая интуиция.

Из всех проблем самая важная — это правильная постановка задач — как при образовании ученого, так и в его работе в будущем, но научить этому труднее всего.

С. П. Капица

ОТ АВТОРОВ

В настоящий Сборник включены задачи, предлагавшиеся в течение многих лет студентам Московского физико-технического института на экзаменах по физике. Инициатива издания настоящего Сборника главным образом принадлежит заведующему кафедрой физики проф. С. П. Капице.

Составители отобрали и отредактировали для Сборника те задачи из обширного архива кафедры физики МФТИ, которые казались наиболее интересными с физической точки зрения. В целом в Сборнике довольно высок удельный вес задач повышенной трудности. Поэтому многие задачи, включенные в Сборник, снабжены решениями или подробными указаниями. Вместе с тем было признано целесообразным в ряде случаев не указывать ход решения и ограничиться приведением только окончательных ответов. В Сборнике предпочтительно использована система единиц СИ, а также абсолютная гауссова система.

Следует отметить, что большинство задач, включенных в Сборник, являются оригинальными. В разные годы они были предложены преподавателями кафедры физики МФТИ. В этом смысле Сборник можно рассматривать как коллективный труд всей кафедры, хотя вся ответственность за возможные недосмотры целиком ложится на авторов. Работа между авторами была распределена следующим образом: разделы III и IV подготовлены С. М. Козелом, разделы II, VI и VII — Э. И. Рашба, а разделы I, V и VIII — С. А. Славатинским. Значительное количество задач, включенных в Сборник, было предложено наряду с авторами профессорами М. Д. Галаниным, А. Д. Гладуном, Л. Л. Гольдиным,

Б. Г. Ёрозолимым, С. П. Капицей, Л. А. Микаэляном, Д. В. Сивухиным, доцентами Д. Б. Диатроповым, А. П. Кирьяновым, Л. Б. Луганским, А. В. Францессоном, И. Ф. Щеголевым и другими преподавателями кафедры физики. Авторы особенно благодарны доценту Д. А. Заикину за помощь, оказанную им при подготовке настоящего Сборника.

При работе над Сборником были широко использованы задачки по различным разделам физики, изданные в МФТИ внутренним тиражом в 1976—77 гг. Большой труд при подготовке этих задачников был выполнен Л. П. Баканиной, Н. С. Берюлевой, А. В. Степановым, М. А. Тулайковой и И. А. Фоминым. Основную работу по оформлению рукописи выполнили Т. А. Селиверстова и Л. Н. Шустова. Всем перечисленным лицам авторы выражают искреннюю благодарность. Мы благодарны также редактору книги Б. С. Беликову, замечания которого весьма способствовали улучшению рукописи.

При составлении Сборника авторы отдавали предпочтение задачам, приближенным к практике, родившимся под влиянием физического эксперимента. В таких задачах рассматриваются не идеализированные схемы, а реальные физические объекты. Многие задачи носят оценочный характер; они должны способствовать развитию у студентов ясности физического мышления и ощущения масштабов физических величин и явлений. При решении большинства задач необходимо не только формальное знание законов, но и достаточно широкий физический кругозор. В Сборнике имеется некоторое количество задач, не претендующих на оригинальность, но имеющих общефизический интерес.

Авторы рассчитывают, что настоящий Сборник окажется полезным студентам физических специальностей, аспирантам и преподавателям физики высших учебных заведений.

I. МЕХАНИКА

1.1. Можно ли измерить гравитационную постоянную γ с относительной погрешностью $\delta = 10\%$, подкатывая свинцовый шар к пробному грузу, подвешенному к чашке пружинных аналитических весов с наивысшей относительной чувствительностью $\eta = 10^{-7}$ (0,1 мг/кг)?

1.2. Двойная звезда имеет период $T = 3$ года, а расстояние L между ее компонентами равно двум астрономическим единицам. Выразить массу звезды через массу Солнца.

1.3. Определить силу натяжения шнура длины $L = 63$ м, связывающего космонавта массы $m = 70$ кг со спутником, масса которого M много больше массы космонавта, при полете спутника по круговой орбите вблизи Земли. При каком расположении космонавта, спутника и Земли это натяжение будет наибольшим?

1.4. Определить массу планеты Марс по параметрам эллиптической орбиты советской автоматической станции «Марс-2», обращающейся вокруг этой планеты. Максимальное удаление станции от поверхности планеты в апогее $a = 25\,000$ км, минимальное удаление от поверхности планеты в перигее $b = 1380$ км, период обращения $T_M = 18$ ч 00 мин. Диаметр Марса $D_M = 6800$ км, необходимые параметры планеты Земля считать известными. При расчете за единицу массы принять массу Земли.

1.5. Считая Землю однородным шаром радиуса R_3 и плотности ρ , найти гравитационное давление p как функцию расстояния от центра Земли. Оценить давление в центре Земли, полагая $R_3 = 6370$ км, $\rho = 5,5$ г/см³.

1.6. Оценить приближенно разность расстояний от центра Земли до уровня моря на полюсе R_p и на экваторе R_e Земли, обусловленную вращением Земли.

1.7. Определить направление и числовое значение скорости v , с которой покинет Солнечную систему космический аппарат, запущенный с Земли со скоростью v_0 в направлении, перпендикулярном линии, соединяющей центр Земли с центром Солнца, в сторону вращения Земли вокруг Солнца.

1.8. Найти минимальную скорость удара о поверхность Луны неуправляемого космического аппарата, выпущенного с Земли по траектории, соединяющей центры Земли и Луны.

1.9. Для звездного скопления оценить среднее время t между столкновениями двух звезд типа Солнца, если их средняя относительная скорость $u = 60$ км/с, а число звезд в кубическом световом годе $N \approx 10$. Уточнить понятие столкновения, которым вы пользуетесь. Масса и радиус Солнца равны соответственно $M_{\text{С}} = 2 \cdot 10^{30}$ кг, $R_{\text{С}} = 7 \cdot 10^8$ м.

1.10. Два спутника A и B следуют друг за другом на расстоянии 45 км по общей круговой орбите вблизи Земли. Чтобы стыковаться, они должны сблизиться и продолжать движение по общей орбите. Какой простейшей последовательностью коротких включений двигателя отстающего спутника B можно осуществить этот маневр, если его двигатель ориентирован касательно к орбите и каждое включение может изменить его скорость на величину Δv , не превышающую 8 км/ч?

1.11. На высоте 200 км плотность атмосферы $\rho_a \approx 1,6 \cdot 10^{-11}$ кг/м³. Оценить силу сопротивления, испытываемого спутником с поперечным сечением $S = 0,5$ м² и массой $m = 10$ кг, летящим на этой высоте. Как изменится скорость и высота спутника за один оборот?

1.12. В одном из фантастических проектов предлагалось изменить скорость вращения Земли с помощью снаряда, запущенного по касательной к экватору. Какова должна быть разность $c - v$ скоростей света и снаряда, чтобы остановить вращение Земли вокруг собственной оси? Радиус Земли $R_{\text{З}} = 6370$ км, масса $M_{\text{З}} = 6 \cdot 10^{24}$ кг. Момент инерции Земли относительно оси вращения с учетом неоднородности ее плотности с большой точностью представляется формулой $I = M_{\text{З}} R_{\text{З}}^2 / 3$. Сравнить кинетическую энергию снаряда с кинетической энергией вращения земного шара. Массу покоя снаряда принять равной $m = 10^6$ кг.

1.13. Определить мощность гипотетической фотонной ракеты, если бы она двигалась за пределами Солнечной системы с нерелятивистской скоростью и постоянным ускорением $a = 10 \text{ м/с}^2$. Масса ракеты $M = 10^3 \text{ кг}$. Сравнить мощность такой ракеты с мощностью Братской ГЭС (4,5 млн. кВт).

1.14. В игрушечную ракету наливается вода, занимающая малую часть внутренней полости ракеты. В остальную часть полости накачивается воздух до давления p . Оценить высоту подъема ракеты h , считая, что масса воды m много меньше массы ракеты M , время истечения воды много меньше времени полета, сечение сопла ракеты много меньше сечения полости.

1.15. Показать, что период T спутника, обращающегося вокруг планеты (или любого другого тела со сферически симметричным распределением масс) в непосредственной близости от ее поверхности, зависит только от средней плотности планеты ρ . Вычислить период такого спутника для нейтронной звезды, считая, что плотность вещества нейтронной звезды такая же, как и плотность вещества внутри атомных ядер ($\rho \approx \approx 10^{14} \text{ г/см}^3$).

1.16. Около звезды с массой M по круговой орбите движется звезда — спутник с массой m , много меньшей M . В некоторый момент времени центральная звезда вспыхивает как сверхновая и выбрасывает массу qM . Считая, что эта масса выходит за орбиту спутника мгновенно, описать возможные виды последующего движения спутника.

1.17. Космический корабль подходит к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. Чтобы перейти на стелящуюся круговую орбиту, в момент наибольшего сближения включают тормозной двигатель, выбрасывающий газы со скоростью 4 км/с относительно корабля в направлении его движения. Какую часть общей массы должно составить сожженное горючее? Оценить температуру горения, если удельная теплоемкость выбрасываемых газов $c_p = 2,2 \times \times 10^3 \text{ Дж/(К} \cdot \text{кг)}$.

1.18. Ракета стартует с вершины самой высокой лунной горы. Угол между направлением струи вылетающих газов и горизонтом поддерживается равным $\varphi = 0,1 \text{ рад}$. Скорость струи относительно ракеты $u = 4 \text{ км/с}$. Как

должна изменяться масса ракеты M в зависимости от времени, чтобы ракета двигалась горизонтально? За какое время τ она наберет первую космическую скорость? Во сколько раз за это время уменьшится масса ракеты? Какова будет перегрузка космонавтов? Радиус Луны $R_{\text{л}} = 1700$ км, ускорение свободного падения вблизи ее поверхности $g_{\text{л}} = 1,7$ м/с².

1.19. Спутник летит по круговой орбите на небольшом расстоянии от поверхности Земли. Масса спутника 50 кг. В спутник попадает и застревает в нем микротеорит с массой 0,1 г, который летел к центру Земли со скоростью 80 км/с. Считая удар центральным, оценить разность между апогеем a и перигеем b новой орбиты спутника.

1.20. Оценить максимальную скорость, которую можно сообщить небольшому предмету в кабине спутника так, чтобы этот предмет в своем движении на протяжении периода ии разу не стукнулся о стенки кабины. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите с периодом $T = 1,5$ ч. Радиус кабины $r_{\text{каб}} = 1,5$ м. Каков характер траектории движения предмета в кабине, если направление толчка лежит в плоскости орбиты?

1.21. По круговой окололунной орбите радиуса R , равного утроенному радиусу Луны $R_{\text{л}}$, вращается стартовая «платформа» с космическим кораблем. Корабль покидает «платформу» в направлении ее движения с относительной скоростью, равной первоначальной орбитальной скорости v_0 «платформы», после чего «платформа» падает на Луну. Определить угол φ , под которым «платформа» врежется в лунную поверхность, если масса «платформы» вдвое больше массы корабля m .

1.22. Определить минимальный запас топлива, необходимый для мягкой посадки ракеты на Луну. Тормозной двигатель включается на время τ на высоте h над Луной. Считать, что скорость ракеты на бесконечности гораздо меньше скорости v_0 на высоте h и что скорость v_0 ракета приобретает только за счет притяжения Луной. Скорость истечения газов относительно ракеты равна u , масса ракеты с топливом до начала работы двигателя равна m_0 . Считать, что $h \ll R_{\text{л}}$, где $R_{\text{л}}$ — радиус Луны.

1.23. Маятниковые часы расположены на поверхности земли над тоннелем метро. Диаметр тоннеля $D =$

$= 2R = 10$ м, а его ось проходит на глубине $h = 15$ м. Принимая среднюю плотность грунта $\rho = 2$ г/см³, оценить относительное изменение периода часов, вызванное наличием тоннеля.

1.24. На какой угол φ наклонится автомобиль (рис. 1) при торможении? Центр масс расположен на равном расстоянии от передних и задних колес на высоте $h = 0,4$ м над землей. Коэффициент трения скольжения $f = 0,8$; расстояние между осями колес $l = 5h$. Упругость всех пружин подвески одинакова и такова, что у неподвижного автомобиля на горизонтальной площадке их прогиб $\Delta = 10$ см.

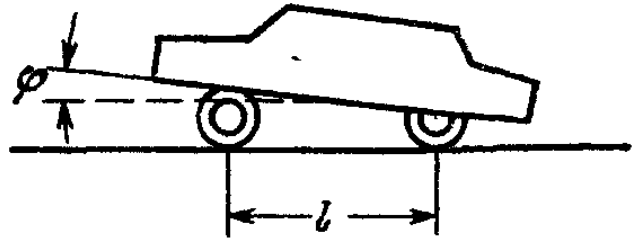


Рис. 1.

1.25. Гимнаст падает с высоты $h = 12$ м в упругую сетку. Во сколько раз максимальная сила, действующая на гимнаста со стороны сетки, больше его первоначального веса, если прогиб сетки под действием первоначального веса гимнаста $\Delta_0 = 1$ м?

1.26. α -частица, летящая со скоростью v_0 , испытывает упругое столкновение с неподвижным ядром и летит под углом 90° к первоначальному направлению движения. При каком соотношении масс α -частицы m и ядра M это возможно? Определить скорость α -частицы v и ядра u после столкновения. Определить также угол φ между направлением скорости вылетевшего ядра и первоначальным направлением движения α -частицы.

1.27. Во сколько раз энергия отдачи ядра при α -распаде Ra^{226} больше, чем при γ -распаде, если полная энергия, освобождаемая при α -распаде, $E_1 = 4,9$ МэВ, а при γ -распаде $E_2 = 0,2$ МэВ?

1.28. Может ли произойти ионизация атома цезия-133 ударом атома кислорода-16 с кинетической энергией $T_0 = 4$ эВ? Энергия ионизации цезия-133 равна 3,9 эВ.

1.29. При каких кинетических энергиях T α -частиц возможно их неупругое рассеяние на ядрах N^{14} , если энергия первого возбужденного состояния этого ядра $U = 2,31$ МэВ?

1.30. Как изменится ход карманных часов, если их положить на горизонтальный абсолютно гладкий стол? Считать, что ось крутильного маятника проходит через

центр часов, а момент инерции часов I_0 в 500 раз больше момента инерции маятника I .

1.31. В одной из ранних классических моделей электрона рассматривался как вращающийся шарик массы m , однородно заполняющей сферу радиуса $r_0 = e^2/mc^2$, где e — заряд электрона. Собственный момент количества движения (спин) электрона равен $\hbar/2$. Показать, что такая модель противоречит специальной теории относительности, так как линейная скорость вращения электрона v превышает скорость света c .

1.32. Оценить величину момента импульса L колеса велосипеда (взрослого размера), едущего со скоростью 30 км/ч. Какой момент сил M надо приложить, чтобы повернуть руль на 1 рад за 0,1 с?

1.33. На качелях, качающихся с небольшой угловой амплитудой φ_0 , сидит человек. Когда качели проходят положение равновесия, человек быстро встает, а в момент максимального отклонения — снова садится. На сколько изменится угловая амплитуда качелей за период? Центр масс человека поднимается и опускается на высоту h . Длина веревок качелей равна l . При расчетах считать, что $l \gg h$, а масса качелей пренебрежимо мала по сравнению с массой человека.

1.34. Теннисный мяч падает на тяжелую ракетку под углом 60° к нормали и упруго отражается. Масса мяча пренебрежимо мала по сравнению с массой ракетки. Как должна двигаться ракетка, чтобы мяч отразился под прямым углом к первоначальной траектории?

1.35. На вертикальной оси под углом φ к ней жестко закреплена штанга. На штанге на расстояниях l от точки закрепления расположены две одинаковые массы m . Ось вращается с угловой скоростью ω . Расстояния от точки закрепления штанги до подшипников оси равны a и b . Найти силы реакции подшипников.

1.36. Горизонтальный диск радиуса R и массы m подвешен в атмосфере некоторого газа на упругой нити с модулем кручения f на расстоянии h ($h \ll R$) от горизонтальной неподвижной поверхности. Найти коэффициент внутреннего трения η в газе по результатам измерения логарифмического декремента затухания d крутильных колебаний. Движение газа между диском и неподвижной поверхностью считать ламинарным; краевыми эффектами пренебречь.

1.37. Обруч радиуса R бросают вперед со скоростью v_0 и сообщают ему одновременно угловую скорость ω_0 . Определить минимальное значение угловой скорости, при котором обруч после движения с проскальзыванием покатится назад. Найти значение конечной скорости v , если $\omega_0 > \omega_{0 \min}$. Трением качения можно пренебречь.

1.38. По шарикку массы m радиуса R (рис. 2), лежащему на горизонтальном столе, наносится короткий горизонтальный удар, сообщаящий ему импульс p . Высота удара над центром равна kR ($k \leq 1$). Найти энергию поступательного и вращательного движения шарика. При каком k шарик покатится без скольжения?

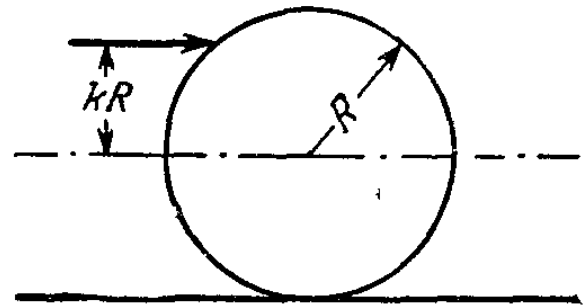


Рис. 2.

1.39. Табуретку наклоняют так, что она опирается на пол двумя ножками, и отпускают, после чего она падает на все четыре ножки. Оценить, на какое расстояние она продвинется по полу.

1.40. С автомобиля соскочило колесо и покатилося по земле. Наблюдение показало, что колесо описало по земле окружность радиуса R . Определить угол наклона оси колеса к горизонту. Автомобиль ехал со скоростью v . Всю массу колеса считать сосредоточенной на его периферии. Известно, что R много больше радиуса колеса.

1.41. Определить максимальное гироскопическое давление быстроходной турбины, установленной на корабле. Корабль подвержен килевой качке с амплитудой $\varphi = 9^\circ$ и периодом $T = 15$ с вокруг оси, перпендикулярной оси ротора. Ротор турбины, момент инерции которого $I = 1260 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, делает $\nu = 3000$ об/мин. Расстояние между подшипниками $l = 2$ м.

1.42. По внутренней поверхности вертикальной цилиндрической стенки едет мотоцикл. Чтобы обеспечить возможность движения в горизонтальной плоскости, к мотоциклу приделан маховик с моментом инерции I , вращающийся вокруг оси, которая вертикальна, когда мотоцикл стоит на земле. Масса мотоцикла с водителем равна m , а центр масс находится на расстоянии l от

поверхности стены (радиус цилиндрической стены много больше размеров мотоцикла). Каков должен быть коэффициент передачи вращения k от колес к маховику, чтобы мотоцикл мог двигаться без проскальзывания колес? Коэффициент трения между колесами и стенкой равен f . Радиус колеса равен r .

1.43. Стержень длины $2l$, наклоненный к горизон-тали под углом φ , падает, не вращаясь, с некоторой вы-соты (рис. 3) на горизонтальный стол и ударяется о по-

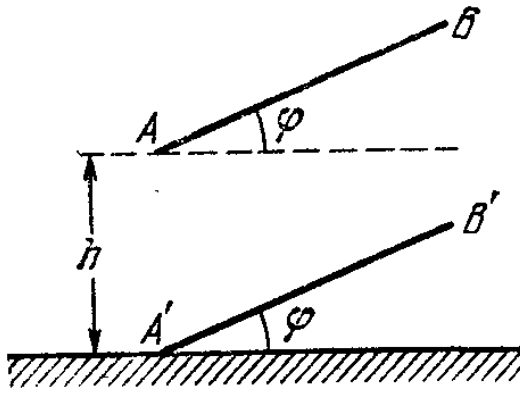


Рис. 3.

верхность стола. Удар считать упругим. Найти скорость центра масс и угловую скорость враще-ния сразу после удара.

1.44. Одним из абсолютных методов определения энергии, излучаемой импульсными кван-товыми генераторами, является измерение механического им-пульса, возникающего при отра-жении или поглощении света

твердой поверхностью. Для этой цели можно использо-вать крутильный баллистический маятник. Рассчитать период колебаний такого маятника с чувствительностью $\eta = 10 \text{ мм}/(\text{Дж} \cdot \text{м})$. Момент инерции маятника принять равным $I = 2 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, а расстояние от оси вращения до отражающего зеркала $r = 50 \text{ мм}$. Вычислить диаметр D кварцевой нити подвеса длиной $l = 0,1 \text{ м}$, позволяющей обеспечить такую чувствительность. Модуль сдвига кварца $G = 10^{11} \text{ Н}/\text{м}^2$.

1.45. Два одинаковых стальных бруска длиной $l = = 0,1 \text{ м}$ и сечением $10 \times 10 \text{ мм}^2$ (плотность $\rho = = 7800 \text{ кг}/\text{м}^3$, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н}/\text{м}^2$) сталки-ваются торцами. Рассматривая упругие волны, оценить время соударения брусков. При каких скоростях брусков возникнут неупругие явления, если предел упругости стали $\rho = 2 \cdot 10^8 \text{ Н}/\text{м}^2$?

1.46. Оценить время соударения футбольного мяча при слабом ударе о стенку.

1.47. Быстро вращающийся однородный шар (угло-вая скорость ω_0) положен на горизонтальную доску так, что его ось вращения составляет с вертикалью угол φ . Определить скорость шара v и угловую скорость ω его вращения, которые устанавливаются после того, как

проскальзывание шара по доске прекратится. Трением качения пренебречь. Радиус шара равен R .

1.48. Биллиардный шар катится без скольжения по горизонтальному столу и ударяется о вертикальную стенку. Деформации шара и стены во время удара упругие. Коэффициент трения между шаром и стеной равен f . Пренебрегая действием силы тяжести за время удара и трением качения, определить, под каким углом к горизонту шар отразится от стены. Исследовать зависимость результата от величины коэффициента трения f .

1.49. В цилиндрической цистерне с площадью основания S налита вода до высоты h . Возле дна цистерны появилось небольшое отверстие с площадью σ . Определить время вытекания воды.

1.50. Цилиндрический сосуд высоты h погружен в воду на глубину h_0 (рис. 4). В дне сосуда площади S появилось маленькое отверстие площади σ . Определить время, через которое сосуд утонет.

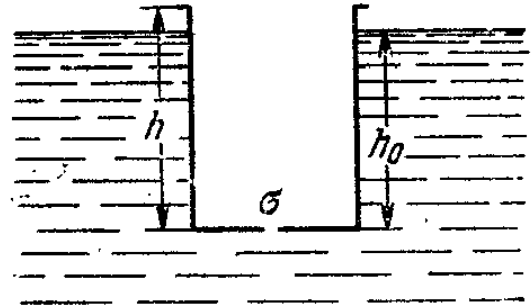


Рис. 4.

1.51. Определить максимальное давление, которое может произвести вода при замерзании. Плотность льда $\rho = 0,92$ г/см³, модуль Юнга $E = 2,8 \cdot 10^{10}$ Н/м², коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

1.52. Модель корабля в 0,01 натуральной величины испытывается в бассейне. Проектная скорость корабля равна 36 км/ч. С какой скоростью надо буксировать модель, чтобы картина гравитационных волн была подобна натуре?

1.53. Оценить методом размерностей фазовую скорость волн на поверхности жидкости, пренебрегая влиянием поверхностного натяжения и конечной глубины.

II. ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

2.1. Вычислить теплоемкость $C(V)$ моля идеального газа, совершающего процесс, показанный на рис. 5. Значение параметра $\gamma = C_p/C_v$ считать известным. Какой максимальной температуры достигает газ в этом процессе? Вычертить график теплоемкости $C(V)$. Указать

политропические процессы, графики которых на p — V -плоскости касаются прямой, представленной на рис. 5, в точках, соответствующих $C(V) = 0$ и $C(V) = \infty$.

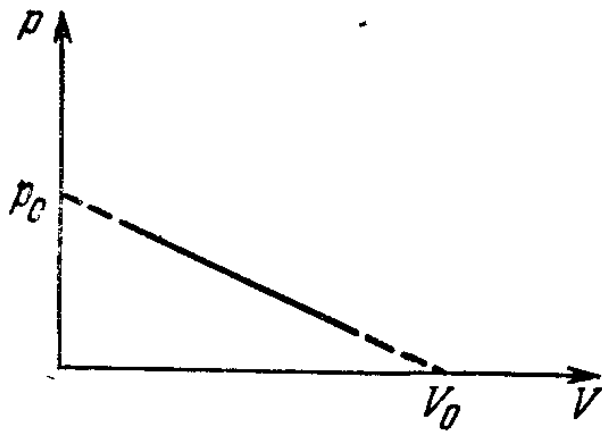


Рис. 5.

2.2. Идеальный газ сжимается под поршнем в цилиндре так, что уходящее в окружающую среду тепло равно изменению внутренней энергии газа. Определить работу, затраченную на сжатие моля газа при изменении объема в два

раза. Чему равна теплоемкость в этом процессе? Начальная температура газа равна T_0 .

2.3. Доказать, что для вещества с произвольным уравнением состояния температурный коэффициент объемного расширения β , температурный коэффициент давления γ и изотермический коэффициент всестороннего сжатия κ связаны соотношением $\beta = \gamma\kappa$.

2.4. Найти скорость адиабатического истечения струи идеального газа из сосуда через маленькое отверстие в вакуум, если известна скорость звука в газе s .

2.5. Вычислить, во сколько раз стартовая масса одноступенчатой ракеты M_0 должна превышать ее конечную массу M , чтобы ракета могла достичь первой космической скорости v_1 . Принять, что истечение в вакуум продуктов горения в двигателе ракеты происходит по идеальному адиабатическому процессу с показателем адиабаты $\gamma = 1,2$. Средняя молярная масса продуктов горения $\mu = 30$ г/моль, температура горения 3000 К. На участке ускорения ракеты пренебречь влиянием силы тяжести и трением о воздух.

2.6. Во сколько раз изменится к. п. д. двигателя внутреннего сгорания, если коэффициент сжатия увеличить с 5 до 10? Реальный цикл двигателя заменить идеальным замкнутым циклом, состоящим из двух изохор и двух адиабат, а рабочее вещество считать многоатомным идеальным газом.

2.7. Атмосфера Земли может рассматриваться как гигантская тепловая машина, в которой роль нагревателя и холодильника играют экваториальная зона и зоны

полюсов, а источником энергии является солнечная радиация. Считая, что полный поток солнечной энергии, поступающий на Землю, равен $Q = 1,7 \cdot 10^{17}$ Вт, а к. п. д. рассматриваемой «машины» на порядок меньше максимально возможного, оценить среднюю мощность, расходуемую на образование ветров, в расчете на 1 км^2 земной поверхности. Обсудить физические причины, вследствие которых $\eta < \eta_{\max}$.

2.8. Доказать, что для вещества с произвольным уравнением состояния, описываемым однозначной функцией $T = T(p, V)$, две политропы не могут встречаться более чем в одном состоянии.

2.9. При адиабатическом сжатии жидкости относительное изменение объема $\Delta V/V = 0,1\%$, а температура поднимается на $\Delta T = 1$ К. Найти по этим данным C_p/C_v , если температурный коэффициент объемного расширения жидкости $\beta = 10^{-4} \text{ К}^{-1}$. На сколько при этом изменилось давление в жидкости, если ее температурный коэффициент давления $\gamma = 10^5 \text{ Н}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$?

2.10. Серебряная проволока диаметра $D = 1$ мм адиабатически нагружается при комнатной температуре силой $F = 10$ Н. Полагая, что удельная теплоемкость $c = 234 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{кг})$, плотность $\rho = 10 \text{ г}/\text{см}^3$, а температурный коэффициент линейного расширения $\alpha = 1,9 \times 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, определить изменение температуры проволоки.

2.11. В расположенном вертикально теплоизолированном цилиндре радиуса r имеется теплопроводящий поршень массы m , закрепленный так, что он делит цилиндр на две равные части. В каждой из этих частей содержится ν молей одного и того же идеального газа при давлении p и температуре T . Крепление поршня удаляется и под действием силы тяжести он опускается. Определить изменение энтропии системы ΔS к моменту установления равновесия. Считать, что $\pi r^2 p \gg mg$.

2.12. В объеме $V_1 = 3$ л находится $\nu_1 = 0,5$ моля кислорода O_2 , а в объеме $V_2 = 2$ л находится $\nu_2 = 0,5$ моля азота N_2 при температуре $T = 300$ К. Найти максимальную работу, которая может быть произведена при смешивании этих газов в суммарном объеме $V_1 + V_2$ в изотермическом и адиабатическом процессах. Оба газа считать идеальными.

2.13. В замкнутой трубе объема V_0 находится смесь двух идеальных газов по ν молей каждого. Начальное давление p . У краев трубы находятся поршни (рис. 6); каждый из них прозрачен для одного из газов. При



Рис. 6.

перемещении поршней в среднюю точку газы полностью разделяются. Непосредственно вычислить работу A , совершаемую внешними силами при изотермическом квази-

статическом перемещении поршней, и сравнить отношение A/T (где T — абсолютная температура) с изменением полной энтропии газов.

2.14. Рассеянный физик, уходя в отпуск, забыл в лаборатории тонкостенный резиновый мешок с гелием объемом около 20 л. Когда он вернулся, весь гелий продиффундировал наружу. Найти изменение энтропии гелия. В обычном воздухе на один атом гелия приходится 10^7 молекул других газов. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы путем изотермического процесса снова собрать в мешок из атмосферы такое же количество гелия?

2.15. В ударной волне нагревание газа происходит настолько быстро, что первоначально нагревание от исходной температуры T_0 до высокой температуры T_1 происходит лишь по внешним поступательным и вращательным степеням свободы. После этого постепенно возбуждаются внутренние, т. е. колебательные степени свободы; этот процесс называется «колебательной релаксацией». Найти температуру двухатомного газа T_2 после колебательной релаксации и изменение энтропии моля газа при релаксации в условиях, когда $kT_1 \gg \hbar\omega$ и $kT_0 \lesssim \hbar\omega$, где ω — частота внутримолекулярных колебаний. Считать, что релаксация происходит при постоянном давлении и в условиях тепловой изоляции.

2.16. Давление насыщенного водяного пара при температуре 290 К равно 0,02 атм. Пар занимает объем 10 л. Найти изменение свободной энергии ΔF и энтропии ΔS при изотермическом сжатии до объема 5 л. Пар считать идеальным газом. Удельная теплота парообразования при этой температуре $\lambda = 2460$ Дж/г.

2.17. Изобразить на p — V -плоскости и проанализировать с помощью термодинамических тождеств цикл Карно

для тепловой машины, работающей на веществе, для которого во всей рабочей области $(\partial p / \partial T)_V < 0$. Указать расположение «горячей» и «холодной» изотерм, установить знаки теплот на обеих изотермах и т. д.

2.18. В вертикальном цилиндре под массивным поршнем площади S находится моль газа Ван-дер-Ваальса, для которого константа b известна. Найти частоту малых колебаний поршня около положения равновесия, считая процесс сжатия и разрежения изотермическим, причем $T = 2T_{кр}$. Равновесный объем газа в условиях опыта принять равным критическому. Внешним давлением пренебречь.

2.19. Найти адиабатическую скорость звука в газе Ван-дер-Ваальса в критической точке. Константы a и b газа и его молярную массу μ считать известными. Теплоемкость C_V задана и не зависит от температуры.

2.20. В дне сосуда с жидким гелием образовалась щель ширины $\delta = 10^{-4}$ см и длины $l = 5$ см. Толщина дна сосуда $d = 0,5$ мм. Найти максимальную скорость гелия в щели v_{max} и полный расход жидкости в единицу времени m , если высота столба гелия над дном сосуда $h = 20$ см. Плотность и коэффициент динамической вязкости гелия $\rho = 0,15$ г/см³, $\eta = 3,2 \cdot 10^{-5}$ г/(см·с). Течение считать ламинарным.

2.21. Проволоку радиуса $R_1 = 1$ мм протягивают с постоянной скоростью $v_0 = 10$ см/с вдоль оси трубы радиуса $R_2 = 1$ см, которая заполнена жидкостью с вязкостью $\eta = 0,01$ П. Определить силу трения F , приходящуюся на единицу длины проволоки, и найти распределение скоростей жидкости вдоль радиуса трубы, считая течение ламинарным.

2.22. Длинная вертикальная трубка длины l и радиуса R заполнена жидкостью, для которой коэффициент кинематической вязкости равен ν . За какое время τ вся жидкость вытечет из трубки под действием силы тяжести? Влиянием сил поверхностного натяжения пренебречь. Процесс установления скорости жидкости считать мгновенным, а течение ламинарным.

2.23. Вода вытекает из широкого открытого сосуда через горизонтальный цилиндрический капилляр радиуса $R = 1$ мм и длины $l = 10$ см, расположенный у дна сосуда. Какая мощность N расходуется на выделение тепла, когда высота воды в сосуде $h = 5$ см? Течение

ламинарное, коэффициент динамической вязкости $\eta \approx \approx 10^{-2}$ П.

2.24. Ракета с термостатированной кабиной, представляющей собой цилиндр высоты h , движется с ускорением a в направлении оси цилиндра. Масса воздуха внутри кабины равна m . Как изменятся температура и энтропия воздуха в кабине после выключения двигателя? Воздух рассматривать как идеальный газ с молярной массой μ . Считать, что $\mu ah/RT_0 \ll 1$, где T_0 — температура воздуха в кабине. Рассмотреть два случая: 1) двигатель выключается медленно, так что процессы идут квазистатически, и 2) двигатель выключается мгновенно.

2.25. Как изменится энтропия моля идеального газа, находящегося в термостатированном цилиндрическом сосуде радиуса r , в результате раскручивания сосуда до угловой скорости $\omega \ll \frac{1}{r} \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$, где μ — молярная масса газа.

2.26. Оценить радиус R алюминиевой частицы, взвешенной в жидкости с плотностью 1 г/см^3 и вязкостью 1 П , для которой скорость вязкого падения сравнивается со скоростью ее теплового движения при комнатной температуре. Будут ли выпадать в осадок такие частицы в алюминиевой краске?

2.27. Неподвижный тонкостенный сосуд объема V наполнен одноатомным идеальным газом и поддерживается при постоянной температуре T . В стенке сосуда имеется отверстие площади S , через которое молекулы газа вылетают в вакуум. Размеры отверстия малы и в сравнении с размерами сосуда, и в сравнении с длиной свободного пробега. Определить закон, по которому изменяется во времени поток тепла Q , подводимый к сосуду для поддержания в нем постоянной температуры.

2.28. Одноатомный идеальный газ находится в неподвижном тонкостенном сосуде объема V с теплоизолированными стенками. В стенке сосуда имеется отверстие площади S , через которое молекулы вылетают в вакуум. Размеры отверстия малы и в сравнении с размерами сосуда, и в сравнении с длиной свободного пробега. Определить закон изменения температуры газа в сосуде во времени. Начальную температуру газа T_0 и все необходимые параметры газа считать известными. Теплоемкостью стенок сосуда пренебречь.

2.29. Оценить время испарения воды из трубки длины $l = 10$ см, запаянной с одного конца. Температура $T = 300$ К. Первоначально вода заполняла трубку наполовину. Относительная влажность воздуха 50%, а давление насыщенных паров $p_{\text{нас}} \approx 27$ мм рт. ст. Длина свободного пробега Λ в системе воздух—пар порядка 10^{-5} см. Пар у поверхности воды считать насыщенным, капиллярными явлениями пренебречь.

2.30. Зная, что средняя длина свободного пробега однозарядного иона аргона-40 в некотором газе $\Lambda = 10^{-5}$ см, приближенно найти среднюю дрейфовую скорость $v_{\text{др}}$ движения иона в этом газе под действием однородного электрического поля 300 В/см. Температура газа комнатная.

2.31. Сосуд через длинную трубку откачивается идеальным (т. е. улавливающим все попадающие в него молекулы) высоковакуумным насосом. Из-за течей в стенках сосуда давление в нем не падает до нуля, а после длительной откачки устанавливается на уровне, при котором длина свободного пробега $\Lambda \gg d$, где d — диаметр трубки. Как изменится этот предельный вакуум, если диаметр трубки уменьшить вдвое?

2.32. Из большого объема откачивается воздух при давлении 10^{-4} мм рт. ст. и температуре 300 К через трубопровод длины $l = 2$ м и радиуса $R = 10$ см. Насос имеет производительность $V_1 = 1000$ л/с. При какой производительности насоса V будет обеспечена такая же скорость откачки сосуда, если насос присоединен непосредственно к откачиваемому объему?

2.33. По распространению радиоактивных газов после ядерных взрывов известно, что благодаря турбулентности время перемешивания по всей земной атмосфере составляет около одного года. Во сколько раз быстрее происходит процесс турбулентного перемешивания в условиях атмосферы по сравнению с молекулярной диффузией?

2.34. Газообразный гелий вытекает в вакуум через отверстие площади $S = 0,1$ мм² из тонкостенного сосуда, в котором давление и температура поддерживаются равными $p = 10^{-6}$ атм, $T = 273$ К. Экспериментально измеряется полное число атомов N , вышедших через отверстие за интервал времени $t = 10^{-3}$ с. Найти относительную среднеквадратичную флуктуацию этого числа. Найти

также вероятность того, что при одном из измерений число вышедших атомов будет равно нулю.

2.35. Вычислить среднеквадратичную относительную флуктуацию потенциальной энергии внутримолекулярных колебаний: а) двухатомной молекулы, б) N -атомной молекулы и в) моля идеального газа, состоящего из двухатомных молекул. Считать колебания гармоническими.

2.36. Два одинаковых сообщающихся сосуда заполнены газом при нормальных условиях. Каким должен быть объем V каждого сосуда, чтобы вероятность состояния, в котором давление в сосудах изотермически изменится на $10^{-7}\%$, была в e^{100} раз меньше, чем вероятность исходного состояния?

2.37. В сосуде с гелием объема V выделен малый объем $v \ll V$, в котором измеряются флуктуации температуры. При какой величине v среднеквадратичная флуктуация температуры составляет $10^{-4}\%$? Гелий находится при нормальных условиях.

2.38. В сосуде объема 1 л при комнатной температуре находится равное количество N атомов двух различных газов. Оценить величину N , при которой вероятность для этих газов хоть один раз разделиться на протяжении эпохи порядка возраста наблюдаемой части Вселенной ($\approx 10^{10}$ лет) сравнима с единицей.

2.39. В сосуде находится газ Ван-дер-Ваальса в условиях, когда средний молярный объем равен критическому, а температура T превышает критическую $T_{кр}$. Найти среднеквадратичную изотермическую флуктуацию объема $(\Delta V)^2$ небольшого элемента этого газа, имеющего равновесный объем V .

2.40. Терморегулятор автомобильного двигателя представляет собой цилиндрический сосуд с гофрированными стенками (сильфон), наполненный этиловым спиртом и его паром (рис. 7). При низкой температуре воды давление в сильфоне мало, он сжат и закрывает клапан, ослабляя таким образом циркуляцию воды в системе охлаждения двигателя. При достаточно высокой температуре воды сильфон растягивается и открывает клапан, вода начинает циркулировать сильнее, охлаждается и т. д. Какова должна быть сила давления пружины клапана F , чтобы клапан открывался при $T = 363$ К? Диаметр сильфона $D = 2$ см, температура кипения спирта

при давлении $p_0 = 1$ атм равна $T_0 = 351$ К, удельная теплота испарения спирта $\lambda = 850$ Дж/г, его химическая формула C_2H_5OH .

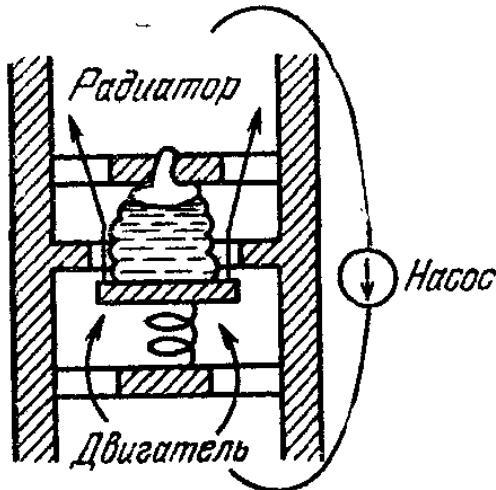


Рис. 7.

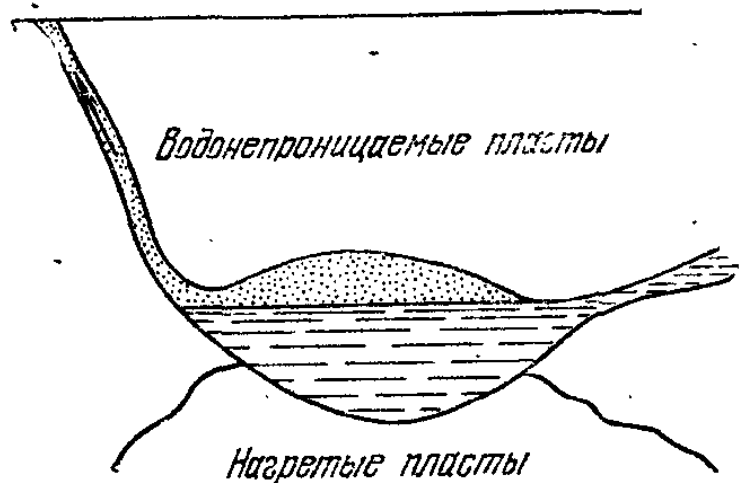


Рис. 8.

2.41. Гейзеры могут рассматриваться как большие подземные резервуары, наполненные грунтовой водой и прогреваемые подземным теплом (рис. 8). Выход из них на поверхность земли осуществляется через узкий канал, который в «спокойный» период заполнен водой. Считая, что «активный» период наступает, когда закипает вода в подземном резервуаре, и что во время извержения гейзера канал заполнен только паром, который и выбрасывается наружу, оценить, какую часть воды теряет резервуар гейзера во время одного извержения. Глубина канала $h = 90$ м. Молярная теплота испарения воды $\Lambda = 41$ кДж/моль.

2.42. Гелий-3 (He^3) при нормальном давлении остается жидким вплоть до абсолютного нуля температур. Минимальное давление, при котором он затвердевает, $p_{\min} = 28,9$ атм. Энтропия жидкого гелия-3 в расчете на моль в интересующей нас области температур меняется по закону $S_{\text{ж}} = R (T/\Theta)$, где R — газовая постоянная, а $\Theta = 0,22$ К (ср. задачу 7.36). Энтропия твердого гелия-3 в рассматриваемом диапазоне температур не зависит от температуры и равна $S_{\text{тв}} = R \ln 2$ на моль (ср. задачу 7.9). Разность объемов жидкого и твердого гелия $\Delta V = V_{\text{ж}} - V_{\text{тв}} \approx 1,25$ см³/моль. Найти температуру, соответствующую на кривой плавления давлению p_{\min} , давление затвердевания гелия-3 при $T = 0$, а также температурную зависимость теплоты плавления.

2.43. Согласно одной из моделей, центральная часть Земли (так называемое ядро) состоит из железа. Внешняя часть ядра расплавлена, а внутренняя часть радиуса $R \approx 1200$ км твердая. Ядро остывает со скоростью $u = 10^{-7}$ К/год; различием температуры в пределах ядра можно пренебречь. Насколько изменится радиус твердой части ядра за время $t = 10^9$ лет? Считать, что удельная теплота плавления железа при условиях, соответствующих поверхности ядра, $q \approx 125$ Дж/г, температура на ней $T \approx 3700$ К, а изменение плотности железа при затвердевании $\Delta \rho = 0,3$ г/см³. Вследствие $\Delta \rho \ll \rho$ можно пренебречь изменением распределения давления $p(r)$ по мере затвердевания ядра.

2.44. В замкнутом сосуде находится вода в равновесии с насыщенным паром при температуре 100 °С. Отношение масс пара и воды $\beta = 0,1$. Удельная теплоемкость воды $c_0 = 4,2$ Дж/(К·г). Найти удельную теплоемкость c такой системы. Пар считать идеальным газом. Удельная теплота парообразования $\lambda = 2260$ Дж/г.

2.45. Найти удельную теплоемкость при постоянном объеме c_V редкого тумана (т. е. насыщенного пара с капельками воды, полная масса которых много меньше массы пара) при температуре 100 °С. Молярная теплота испарения воды при 100 °С и постоянном давлении $\Lambda = 41$ кДж/моль.

2.46. Мыльный пузырь радиуса r при понижении давления во внешней среде увеличил свой радиус вдвое. Считая процесс изотермическим, найти изменение энтропии мыльного пузыря. Начальное давление равно p_0 , коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки σ , удельная теплота образования каждой поверхности мыльной пленки q . Считать, что $2\sigma/r \ll p_0$.

III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

3.1. В плоском конденсаторе с напряженностью поля $E = 10^3$ В/м из отрицательно заряженной пластины в результате термоэмиссии вылетают электроны. Принимая во внимание действие поля электрического изображения, оценить, на каком расстоянии от этой пластины скорость электронов будет наименьшей?

3.2. Идеальный газ, поляризуемость молекул которого $\alpha = 4 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$, находится в большом сосуде при температуре $T = 300 \text{ К}$. В сосуде находится плоский заряженный конденсатор с напряженностью поля $E = 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$. Найти относительную разность концентраций молекул в конденсаторе и вне его.

3.3. Найти электрическое поле в полости, образованной пересечением двух шаров (рис. 9). Шары несут равномерно распределенные по объему заряды с плотностями ρ и $-\rho$. Расстояние между центрами шаров равно a .

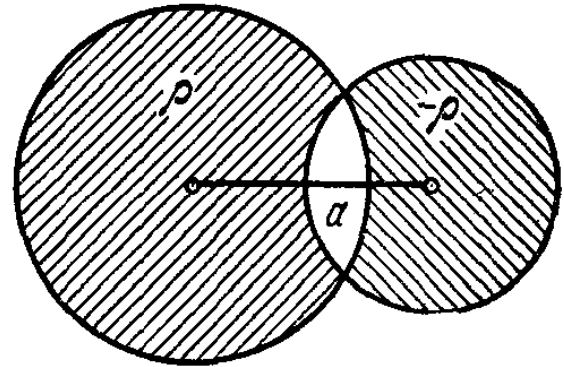


Рис. 9.

3.4. Как следует распределить заряды $\sigma(\theta)$ по поверхности сферы радиуса R , чтобы поле внутри нее было однородным и равным E ? Каким будет при этом поле вне сферы?

3.5. Насколько отличается от единицы диэлектрическая проницаемость ϵ «идеального газа», состоящего из большого числа проводящих шариков радиуса R ? Концентрация n шариков мала, так что $nR^3 \ll 1$.

3.6. Во внешнее однородное электрическое поле попала незаряженная проводящая сферическая пылинка. Как изменится поле в точках A , B , C и D (рис. 10)?

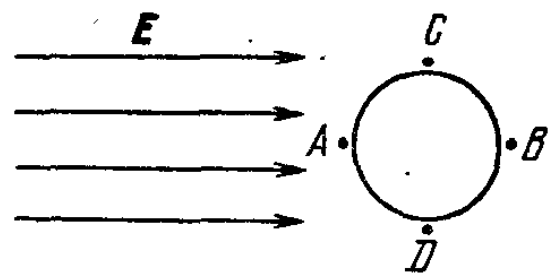


Рис. 10.

3.7. Для газообразного аргона при нормальных условиях $\epsilon - 1 \approx 6 \cdot 10^{-4}$. Пользуясь этим, вычислить смещение «центра масс» электронной оболочки атома аргона относительно ядра в статическом

электрическом поле с напряженностью $E = 300 \text{ В/см}$. Атомный номер аргона $Z = 18$. (Считать, что в отсутствие внешнего поля электроны распределены вокруг ядра сферически симметрично.)

3.8. В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд e распределен внутри шара радиуса $R = 10^{-8} \text{ см}$. Как должна зависеть от расстояния до центра шара плотность положительного заряда, чтобы электрон (точечная отрицательно заряженная частица, несущая заряд $-e$), помещенный внутри шара, мог совер-

шать гармонические колебания? Найти частоту колебаний электрона. Считать, что механически заряды друг на друга не действуют.

3.9. Существует ли принципиальная возможность определить ускорение ракеты чисто электрическим методом? Провести численные оценки для $a = 10 g$ и длины проводника $l = 10$ м. Внешними электрическими и магнитными полями пренебречь.

3.10. Внутри сферической незаряженной проводящей оболочки на расстоянии a от ее центра помещен точечный заряд q . Радиусы внутренней и внешней поверхностей оболочки равны r и R . Найти поверхностную плотность σ индуцированных электрических зарядов на внешней поверхности оболочки и ее потенциал ϕ . Определить поверхностную плотность σ_1 и σ_2 индуцированных зарядов в точках внутренней поверхности оболочки, расположенных на одном диаметре с зарядом q .

3.11. Внутри плоского конденсатора, обкладки которого соединены между собой, помещена диэлектрическая пластина толщины h с «замороженной» поляризацией $\mathbf{P} = \text{const}$. Вектор поляризации перпендикулярен боковым граням пластины и обкладкам конденсатора. Определить напряженность электрического поля и индукцию внутри пластины. Расстояние между обкладками конденсатора равно d .



Рис. 11.

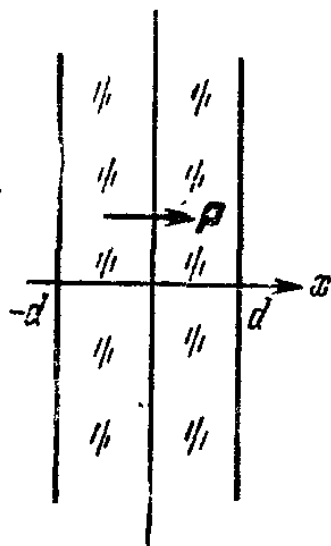


Рис. 12.

дукцию внутри пластины. Расстояние между обкладками конденсатора равно d .

3.12. Имеется тонкий длинный диэлектрический цилиндр длины $2l$ и радиуса r с «замороженной» поляризацией $\mathbf{P} = \text{const}$ (рис. 11). Найти поле в точке A . Во сколько раз это поле сильнее, чем в точке B ?

3.13. Пластина пьезоэлектрика толщины $2d$ вследствие неоднородной деформации поляризована так, что поляризация в ее середине равна P_0 и изменяется по закону $P = P_0 (1 - x^2/d^2)$, где x отсчитывается от средней плоскости пластины. Вектор поляризации направлен вдоль оси x (рис. 12). Определить напряженность электрического поля внутри и вне пластины, а также разность потенциалов между

Рис. 11. Рис. 12.

ее боковыми поверхностями. Краевыми эффектами пренебречь.

3.14. В результате импульсного разряда конденсатора через разреженный газ — водород происходит нагревание газа до температуры T . Оценить величину T , предполагая, что вся энергия разряда пошла на нагревание газа. Указать возможные причины понижения температуры. Проведите числовые оценки для $U = 3 \cdot 10^4$ В, $C = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Ф, полагая, что до разряда водород находился при комнатной температуре $T_0 = 293$ К и занимал объем $V = 10^{-2}$ м³ при давлении $p = 1,29$ Н/м². Оценить, насколько нагрелись бы обкладки конденсатора, если бы вся энергия разряда пошла на их нагревание. Удельная теплоемкость меди $c = 4,2 \cdot 10^2$ Дж/(К·кг), масса обкладок $m = 0,1$ кг.

3.15. Найти силу притяжения точечного электрического диполя с дипольным моментом $p = 4 \cdot 10^{-10}$ Кл·м к бесконечной металлической пластинке, находящейся на расстоянии $L = 1$ см от диполя. Ось диполя перпендикулярна пластинке. Определить работу, которую нужно затратить, чтобы отодвинуть диполь от поверхности пластинки до расстояния $L_1 = 2L$.

3.16. Вывести выражение для энергии малого диполя во внешнем электрическом поле E . Рассмотреть случаи жесткого диполя с дипольным моментом p и упругого диполя с поляризуемостью α ($p = \alpha \epsilon_0 E$).

3.17. Оценить разность потенциалов между головной и хвостовой частями стального керна бронебойного снаряда, возникающую вследствие его торможения в преграде. Принять, что керн длиной $l = 25$ см потерял скорость, пробив броню толщиной $d = 5$ см. Скорость снаряда в момент соприкосновения с броней $v_0 = 1000$ м/с.

3.18. Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ заполняет полупространство. На расстоянии L от плоской границы диэлектрика в вакууме находится точечный заряд q . Найти распределение заряда σ по поверхности диэлектрика и силу F , действующую на заряд.

3.19. Плоский конденсатор емкости C последовательно с некоторым сопротивлением подключен к батарее с э. д. с. \mathcal{E} . Пластины конденсатора быстро сближают, так что расстояние между ними уменьшается в два раза. Предполагая, что за время перемещения пластин заряд

конденсатора практически не изменялся, найти джоулево тепло, которое выделится на сопротивлении к моменту окончания перезарядки. Оценить порядок величины сопротивления, при котором условия задачи могут быть практически выполнены, считая время сближения $\Delta t \approx 10^{-2}$ с, $C \approx 10^{-10}$ Ф.

3.20. Оценить силу, действующую на атом, находящийся на расстоянии $l = 200$ Å от поверхности острия металлической иглы с радиусом закругления $R = 100$ Å. Потенциал на игле $\varphi = 10$ кВ. Поляризуемость атома α порядка его объема.

3.21. К большому металлическому листу толщины a приварены на расстоянии b друг от друга два цилиндрических проводника радиуса r_0

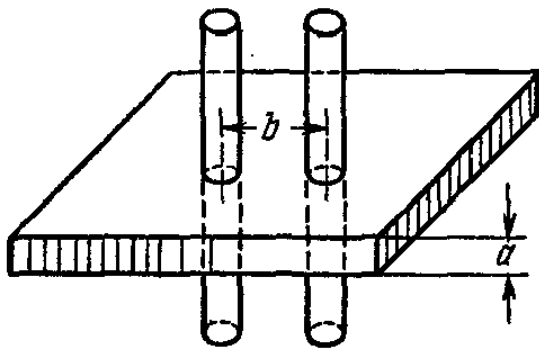


Рис. 13.

(рис. 13). Оценить сопротивление между проводниками, если $a \ll r_0 \ll b$. Проводимость проводников λ_1 значительно больше проводимости материала листа λ .

3.22. Когда напряжение на кенотроне равно 500 В, температура анода достигает

800 °С. Какой величины достигает температура анода при повышении анодного напряжения до 1000 В в двух случаях: 1) при 500 В, когда анодный ток достигает насыщения, 2) при 1000 В, когда еще не наступает насыщение?

Примечание. Принять во внимание, что в отсутствие насыщения анодный ток \mathcal{I} пропорционален $U^{3/2}$.

3.23. Атомный электрический элемент представляет собой две концентрические проводящие сферы. Внутренняя сфера сделана из радиоактивного материала, испускающего быстрые электроны. В пространстве между сферами скорость электронов, а следовательно, и их ионизирующее действие можно считать постоянными. Пролетев воздушный зазор, электроны поглощаются на внешней сфере. В отключенной батарее устанавливается равновесие между потоком заряда, переносимым быстрыми электронами, и током проводимости в ионизированном воздухе. Найти электрическое поле в пространстве между сферами, если э. д. с. элемента равна \mathcal{E} , радиусы сфер равны R_1 и R_2 .

3.24. Определить проводимость изоляции в сферическом конденсаторе, заполненном диэлектриком с утечкой.

3.25. Пространство между двумя концентрическими сферами заполнено диэлектриком, проводимость которого зависит только от расстояния до сфер. Каков должен быть закон изменения проводимости, чтобы объемная плотность джоулевых потерь при прохождении тока была одинакова во всех его точках?

3.26. В генераторе Ван-де-Граафа, схематически изображенном на рис. 14, заряды переносятся диэлектрической лентой и заряжают высоковольтный сферический электрод. Поверхностные заряды передаются ленте от источника вблизи нижнего шкива. Оценить максимальный потенциал и максимальный ток, которые можно получить от такого генератора, если радиус высоковольтного электрода $R =$

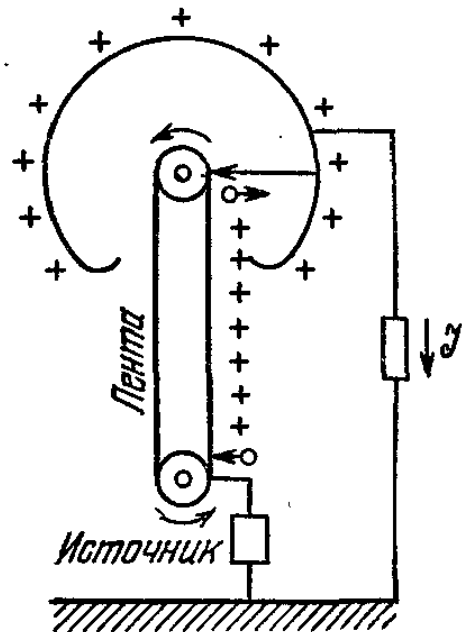


Рис. 14.

$= 1,5$ м, скорость движения ленты $v = 20$ м/с, а ширина ленты $l = 100$ см. Лента и высоковольтный электрод находятся в атмосфере газа, в котором пробой возникает при напряженности электрического поля $E_{пр} = 30$ кВ/см.

3.27. Сферический конденсатор с радиусами сфер R_1 и R_2 заполнен слабо проводящей средой. Емкость конденсатора оказалась равной C , а разность потенциалов на конденсаторе после отключения его от батареи уменьшается в два раза за время t . Определить диэлектрическую проницаемость среды ϵ и ее удельное сопротивление ρ .

3.28. Согласно современным данным, допустимое из опытов различие абсолютных величин зарядов электрона q_e и протона q_p таково, что $|(q_p - q_e)/q_p| < 10^{-21}$. Не может ли это различие обеспечить существование наблюдаемого магнитного момента Земли? Магнитное поле Земли $B_3 \approx 3 \cdot 10^{-5}$ Т, плотность $\rho \approx 5 \cdot 10^3$ кг/м³. Считать, что для атомов, составляющих Землю, отношение относительной атомной массы A к атомному номеру Z порядка 2.

3.29. Тонкостенная длинная дюралевая трубка заряжается электрически и приводится в быстрое вращение

вокруг продольной оси. Какова будет конфигурация создавшегося магнитного поля? Предел скорости вращения трубки ограничивает механическая прочность дюрала ($f_{\max} = 5,9 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$). Какое наибольшее отношение объемных плотностей энергий магнитного поля внутри трубки и электрического поля на внешней поверхности трубки можно получить? Плотность дюрала $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

3.30. При производстве полиэтиленовой пленки широкая полоса протягивается по роликам со скоростью $v = 15 \text{ м/с}$ (рис. 15). В процессе обработки (главным образом из-за трения) поверхность пленки приобретает равномерно распределенный заряд σ . Оценить максимальные значения σ и индукции магнитного

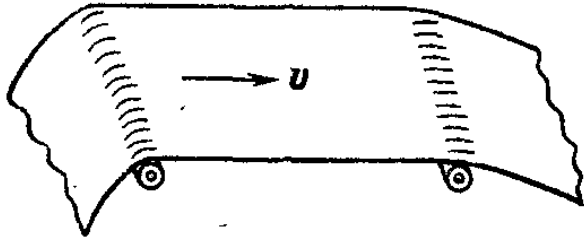


Рис. 15.

поля B вблизи поверхности пленки, принимая во внимание, что при напряженности электрического поля $E = 20 \text{ кВ/см}$ в воздухе возникает электрический разряд.

3.31. Какое количество неподвижных однозарядных положительных ионов нужно поместить в пространство, занимаемое параллельным однородным пучком электронов кругового сечения, движущихся со скоростью v , чтобы радиус пучка при его движении не изменялся? Концентрация электронов в пучке n_0 . Столкновениями электронов с ионами пренебречь.

3.32. По длинному плазменному цилиндру радиуса $R = 0,05 \text{ м}$ течет ток $\mathcal{I} = 10^5 \text{ А}$, сосредоточенный в поверхностном слое. Давление в плазме $p = 10^5 \text{ Н/м}^2$. Определить силу, действующую на единицу площади боковой поверхности плазменного цилиндра. Сжимается плазма или расширяется? Найти величину тока, необходимого для того, чтобы радиальные силы уравновешивались.

3.33. Плазменный шнур удерживается с помощью магнитного поля, параллельного оси шнура, вследствие того, что поле не проникает внутрь плазмы. Оценить величину индукции магнитного поля, необходимого для удержания плазмы, если концентрация частиц плазмы $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, а ее температура $T = 10^8 \text{ К}$.

3.34. Вдоль эвакуированной длинной цилиндрической трубы радиуса R создан стационарный аксиально

симметричный поток электронов, ускоренных при прохождении разности потенциалов U . Найти распределение концентрации электронов в зависимости от радиуса r в некотором сечении пучка, если результаты измерения магнитного поля B , как функции r в этом сечении, оказались возможным описать выражением $B = B_0 (r/R)^q$ при $r < R$ (B_0 и $q > 0$ — постоянные). Определить электрическое поле $E(r)$, предполагая, что параметры пучка не изменяются вдоль его оси.

3.35. Вблизи длинного прямого провода, по которому протекает ток $\mathcal{I}_1 = 10$ А, расположена квадратная рамка с током $\mathcal{I}_2 = 1$ А (рис. 16). Рамка и провод лежат в одной плоскости; стороны рамки $a = 6,8$ см, расстояние $b = 4$ см. Какую работу нужно совершить, чтобы прямой провод передвинуть в положение, указанное пунктиром?

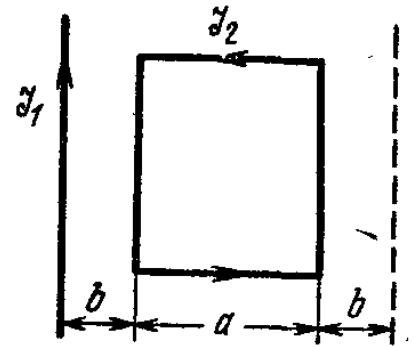


Рис. 16.

3.36. Катушка, имеющая N витков, намотана на железный тороидальный сердечник с магнитной проницаемостью μ . Радиус тора R , радиус сечения сердечника $r \ll R$. Тор разрезан на две половины, раздвинутые так, что образовался воздушный зазор x (рис. 17). Определить силу притяжения между половинами тора, если в обмотке протекает ток \mathcal{I} . Рассмотреть случай $x = 0$.

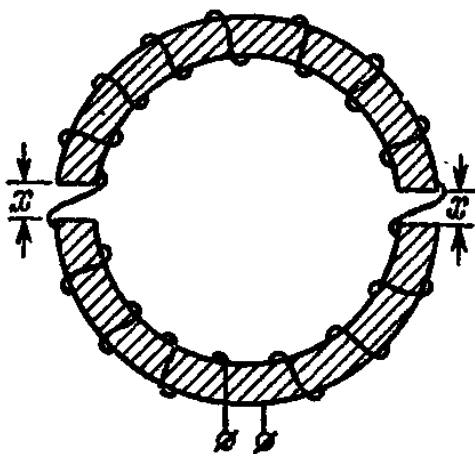


Рис. 17.

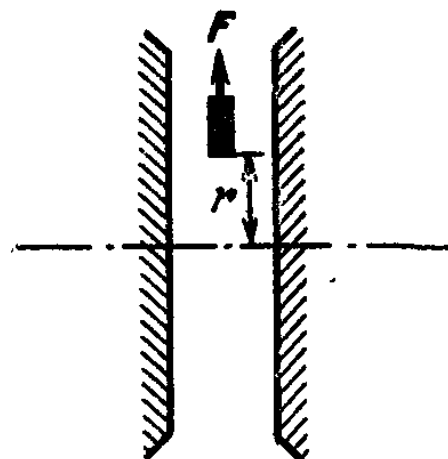


Рис. 18.

3.37. Для определения магнитной восприимчивости χ диамагнитного материала измеряют с помощью весов силу, выталкивающую маленький образец из зазора между полюсами электромагнита (рис. 18). Пусть маг-

нитное поле в зазоре изменяется в радиальном направлении по закону $B = B_0 e^{-\alpha r^2}$, где r — расстояние от оси симметрии (в см), B_0 — поле на оси, равное 10^3 Гс, α — константа, равная 10^{-2} см $^{-2}$. На каком расстоянии от оси нужно расположить диамагнитный образец, чтобы выталкивающая сила была максимальной, и чему равна эта максимальная сила для образца в виде небольшого тонкого диска объема $V = 0,1$ см 3 ? Магнитную восприимчивость материала принять равной $\kappa = -1,4 \cdot 10^{-5}$ (висмут). Диск ориентирован перпендикулярно магнитному полю.

3.38. Сверхсильные магнитные поля получают взрывным сжатием отрезка проводящей трубы, в которой создано начальное магнитное поле B_0 . Определить конечное магнитное поле и радиус трубы R , если при сжатии давление магнитного поля уравнивается давлением 1 млн. атм от взрыва. Рассмотреть случай: $B_0 = 5$ Т, начальный радиус трубы $R_0 = 0,05$ м. Механическим и электрическим сопротивлением пренебречь.

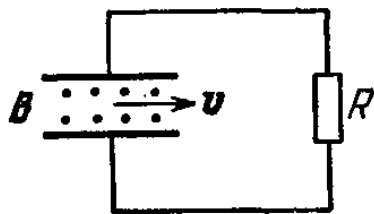


Рис. 19.

3.39. В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d помещен в поток проводящей жидкости с удельной проводимостью λ , движущейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией B , направленной перпендикулярно скорости жидкости (рис. 19). Какая мощность выделится во внешней цепи, имеющей сопротивление R ?

3.40. Компас располагают над проводом, по которому течет постоянный ток, на расстоянии $R = 0,1$ м от оси провода. Найти ток, при котором стрелка поднимается над своим шпёнком. Остаточная индукция стали стрелки равна индукции насыщения $B_0 = 2$ Т. Плотность стали $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м 3 .

3.41. Определить период малых колебаний свободно подвешенного за середину тонкого магнитного бруска длиной $l = 0,1$ м в магнитном поле Земли ($B_3 = 2 \cdot 10^{-5}$ Т). Плотность стали $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м 3 , остаточная индукция $B_0 = 1$ Т.

3.42. Стальной шарик намагничивается до насыщения во внешнем поле, после чего поле выключается. Оценить

остаточную намагниченность шарика, если B и H связаны уравнением $B = B_0 (1 + H/H_k)$ и для данного сорта стали $H_k = 4 \cdot 10^3$ А/м, $B_0 = 1$ Т. Коэффициент размагничивания сферы $\beta = 1/3$.

3.43. На рис. 20 изображена зависимость намагничивания I от напряженности поля H для некоторого магнитного материала. Из этого материала изготовили сердечник тонкой тороидальной катушки, имеющей N витков. Длина катушки (периметр) равна L . В сердечнике

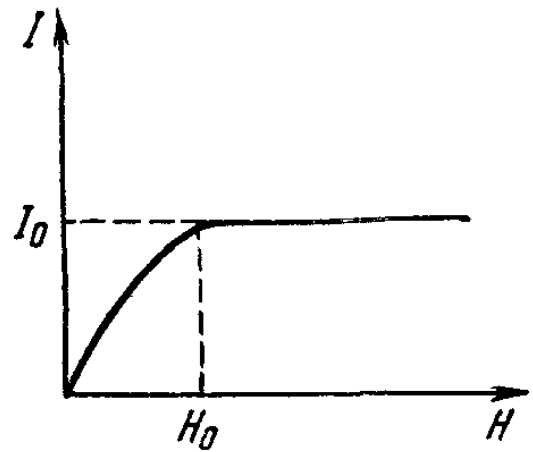


Рис. 20.

имеется узкий поперечный воздушный зазор l . Определить, при каком значении тока \mathcal{I}_0 в катушке наступит насыщение сердечника. Как будет изменяться магнитная индукция B в зазоре сердечника при $\mathcal{I} > \mathcal{I}_0$? Величины I_0 и H_0 считать заданными.

3.44. Для сообщения угловой скорости искусственному спутнику Земли можно использовать магнитное поле Земли. Найти величину угловой скорости, которую приобретает спутник при быстрой разрядке аккумуляторов емкостью Q , равной 5 а·ч, через обмотку $N = 20$ витков, уложенную на поверхности спутника вдоль окружности большого круга. Спутник массы $m = 10^3$ кг выполнен в виде тонкостенного шара. Магнитное поле Земли параллельно плоскости обмотки, а его индукция $B = 0,5$ Гс.

3.45. Какой ток нужно пустить по длинному и тонкому однослойному соленоиду с плотностью обмотки n витков на единицу длины, чтобы индукция B всюду была равна индукции постоянного магнита тех же размеров? Намагничивание $I = \text{const}$ и направлено по оси.

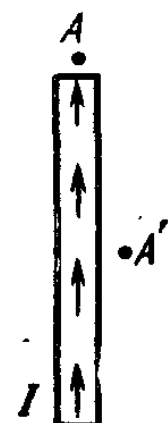


Рис. 21.

3.46. Имеется тонкий длинный постоянный магнит длины $2l$ и радиуса r , намагничивание которого $I = \text{const}$ (рис. 21). Найти индукцию B в точке A . Во сколько раз она больше индукции в точке A' ?

3.47. Определить частоту поперечных колебаний протонов, захваченных релятивистским электронным

пучком, имеющим сечение $\pi R^2 = 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ и силу тока $\mathcal{I} = 10^3 \text{ А}$.

3.48. Две щели S_1 и S_2 шириной $d = 0,1 \text{ см}$ каждая, установленные в evacuated сосуде, выделяют «плоский» пучок электронов с энергией $W = 400 \text{ эВ}$ (рис. 22).

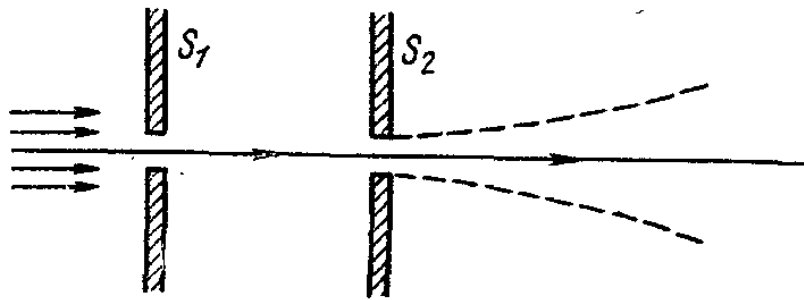


Рис. 22.

На каком расстоянии x от щели S_2 ширина электронного пучка удвоится из-за кулоновского расталкивания электронов, если электронный ток, приходящийся на единицу

длины щели (за щелью S_2), равен $\mathcal{I} = 10^{-4} \text{ А/см}$. При расчетах щели считать бесконечно длинными.

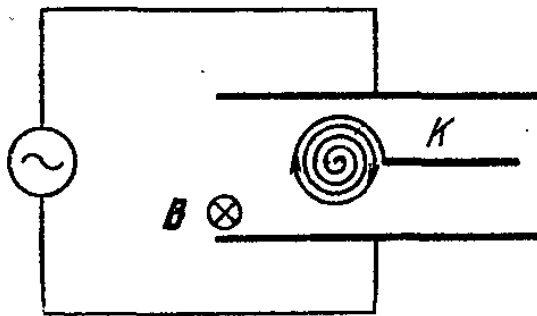


Рис. 23.

$= 1 \text{ В/см}$ и постоянном магнитном ($B = 3 \cdot 10^3 \text{ Гс}$) полях (рис. 23). Найти частоту, при которой ионы N_2^+ будут достигать коллектора К. При этой частоте радиус спирали будет возрастать до тех пор, пока ион достигнет

3.49. В омегатроне ион остаточного газа раскручивается по спирали в скрещенных переменном электрическом (с амплитудой $E =$

$= 1 \text{ В/см}$) и постоянном магнитном ($B = 3 \cdot 10^3 \text{ Гс}$) полях (рис. 23). Найти частоту, при которой ионы N_2^+ будут достигать коллектора К. При этой частоте радиус спирали будет возрастать до тех пор, пока ион достигнет

коллектора на радиусе $R = 1 \text{ см}$. Если частоту немного изменить, то ион будет некоторое время раскручиваться, а потом начнет скручиваться обратно к источнику. Оценить, насколько надо изменить частоту, чтобы ток на коллектор прекратился.

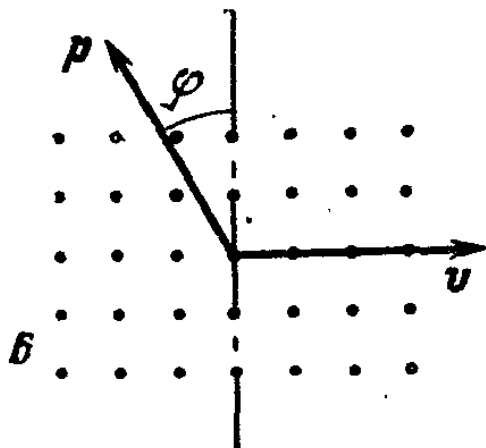


Рис. 24.

3.50. Электрический диполь движется в однородном магнитном поле \mathbf{B} со скоростью \mathbf{v} ,

перпендикулярной \mathbf{B} . Дипольный момент \mathbf{p} составляет малый угол ϕ с направлением $[\mathbf{vB}]$ (рис. 24). Найдите

угловую частоту малых колебаний диполя ω_0 , считая известными его момент инерции I_0 , скорость v , дипольный момент p и индукцию поля B .

3.51. В ускорителе электронов — бетатроне роль ускоряющего напряжения играет э. д. с. индукции, возбуждаемая изменением магнитного потока, пронизывающего орбиту электронов. Электроны движутся при этом по орбитам приблизительно постоянного радиуса. Считая радиус орбиты электрона неизменным, определить необходимое для этого в данный момент времени соотношение между средним магнитным полем $B_{\text{ср}}$, пронизывающим орбиту электрона, и магнитным полем на орбите электрона B . Магнитное поле параллельно оси симметрии вакуумной камеры бетатрона.

3.52. В цилиндрическом пропорциональном счетчике пучок частиц образует объемную ионизацию. Оценить время собирания ионов в таком счетчике, наполненном аргоном при нормальном давлении. Радиус катода $R = 1$ см, радиус анода $r = 2 \cdot 10^{-2}$ см, разность потенциалов между анодом и катодом $U = 2500$ В, подвижность положительных ионов аргона $\mu^+ = 1,4$ см²/(В·с).

3.53. Из ускорителя выводится пучок протонов с энергией $W = 4$ МэВ, который затем проходит в вакууме путь $l = 4$ м, прежде чем попасть на мишень. Вследствие кулоновского взаимодействия частиц размеры пучка увеличиваются. Оценить максимальную плотность тока j в пучке, если допускается увеличение радиуса пучка на $\delta = 10\%$ по сравнению с исходным. Распределение частиц в пучке аксиально симметрично, их начальными поперечными скоростями пренебречь.

3.54. В установке для разделения изотопов U^{235} и U^{238} (рис. 25) пучок однократно ионизованных ускоренных ионов урана с энергией $W = 5$ кэВ попадает от источника через щель S в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рисунка. В магнитном поле ионы разных масс движутся по различным окружностям и, совершив полуоборот, попадают в приемники. Конструкция последних должна быть такова, чтобы расстояние между пучками U^{235} и U^{238} на выходе было не

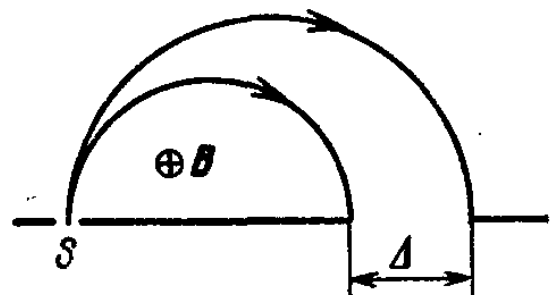


Рис. 25.

меньше $\Delta = 5$ мм. Каково должно быть магнитное поле B , удовлетворяющее этому условию? Найти также время t , необходимое для полного разделения $M = 1$ кг природного урана, если ионный ток, создаваемый источником, $\mathcal{I} = 5$ мА.

3.55. В ускорителе прямого действия протон движется в практически однородном электрическом поле внутри вакуумной трубки. Посторонние магнитные поля искривляют его траекторию, в результате чего он может попасть на стенку, не дойдя до конца трубки. Оценить допустимый уровень однородного внешнего магнитного поля в таком ускорителе, если длина трубки $l = 2$ м, а протоны ускоряются до энергии $W = 4$ МэВ. Допустимое отклонение протонов от осевой линии в конце трубки $b = 1$ см. Начальной скоростью протонов пренебречь.

3.56. Один из предложенных путей получения высоких температур, необходимых для осуществления термоядерных реакций, использует так называемую «магнитную термоизоляцию». Уход быстрых частиц из зоны высокой температуры предотвращается магнитным полем. Оценить силу тока в столбе газового разряда радиуса $R = 3$ см, необходимую для того, чтобы электроны, обладающие средней скоростью хаотического движения, соответствующей температуре $T = 10^6$ К, не могли удалиться от поверхности столба

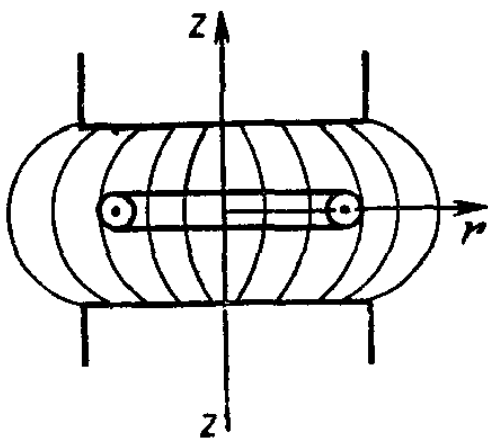


Рис. 26.

на расстояние более чем $r = 3 \cdot 10^{-3}$ см.

3.57. Частица с массой m и зарядом e движется по равновесной круговой орбите радиуса r_0 в горизонтальной плоскости зазора магнита (рис. 26), в котором магнитное поле спадает по радиусу по закону $B_z(r) = A/r^n$ ($0 < n < 1$). Центр ор-

биты совпадает с осью симметрии zz . Определить частоту вертикальных колебаний частицы на такой равновесной орбите в случае малых отклонений от горизонтальной плоскости.

3.58. В условиях задачи 3.57 определить частоту радиальных колебаний частицы в случае малых отклонений от равновесной орбиты.

3.59. Сверхпроводящий шар радиуса R помещен в однородное магнитное поле с индукцией B_0 . Найти магнитное поле вне шара и поверхностную плотность тока i .

У к а з а н и е. Внутри сверхпроводника напряженность и индукция магнитного поля равны нулю.

3.60. Насколько отличается от единицы магнитная проницаемость μ «идеального газа», состоящего из большого числа сверхпроводящих шариков радиуса R ? Концентрация шариков n мала, так что $R^3 n \ll 1$.

3.61. Токи, текущие по поверхности сверхпроводящего тела, приводят к тому, что магнитное поле внутри сверхпроводника всегда равно нулю. Однако если вокруг тела магнитное поле слишком велико, то сверхпроводимость разрушается и металл переходит в нормальное состояние. Для свинца при температуре 2 К критическое поле $B_{кр} = 750$ Гс. Оценить максимальный размер шарика, который можно подвесить на «магнитной подушке» при $T = 2$ К. Плотность свинца $\rho = 11,3$ г/см³.

3.62. Сверхпроводящий шарик летит по направлению к соленоиду вдоль его оси. Индукция магнитного поля соленоида $B_0 = 0,1$ Т. Какой должна быть начальная скорость шарика v_0 , чтобы он мог влететь в соленоид? Радиус шарика $R = 0,02$ м, масса $m = 10^{-3}$ кг.

3.63. Сверхпроводящий соленоид деформируют так, что происходит адиабатическое сжатие магнитного поля. Каким уравнением (аналогичным уравнению адиабаты в теории газов) можно описать поведение магнитного давления при изменении площади сечения соленоида?

3.64. В замкнутой сверхпроводящей обмотке электромагнита возбужден ток \mathcal{I}_0 . В стальном магнитопроводе длины L с магнитной проницаемостью μ имеется небольшой зазор l такой, что рассеянием магнитного поля в зазоре можно пренебречь. Как изменится ток в обмотке, если путем деформации сердечника зазор уменьшить в два раза?

3.65. Над сверхпроводящей плоскостью расположен тонкий прямой проводник, по которому течет постоянный ток. Полагая линейную плотность проводника $\rho = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/м, найти на какой высоте над плоскостью будет свободно висеть проводник с током $\mathcal{I} = 20$ А.

3.66. Оценить резонансную частоту тороидального резонатора, используемого в клистронах, сечение кото-

рого изображено на рис. 27. Считать, что центральная часть резонатора представляет собой конденсатор, через который протекает ток, а тороидальная полость заполнена магнитным полем этого тока. Размеры резонатора: $a = 10$ см и $d = 1$ см.

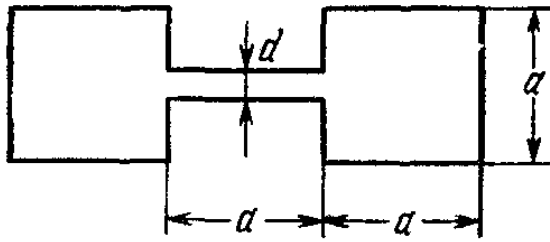


Рис. 27.

3.67. Индуктивный датчик является радиотехническим устройством для регистрации небольших изменений индуктивности. Обычно такой датчик представляет собой электрический колебательный контур с изменяющейся индуктивностью (рис. 28). Оценить минимально измеряемое относительное изменение индуктивности $\Delta L/L$, если контур настроен в резонанс; напряжение источника питания $U = 100$ В, минимально измеряемое изменение напряжения на сопротивлении $\Delta V = 10$ мкВ, добротность контура $Q = 10^2$.

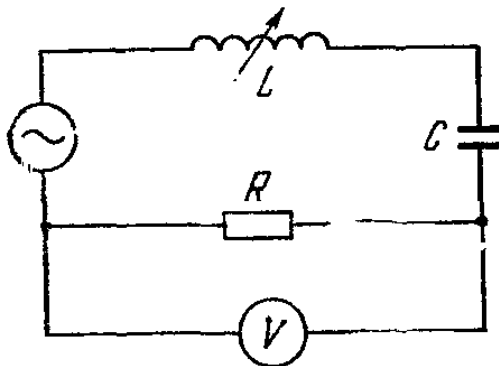


Рис. 28.

3.68. Емкостный датчик — одно из наиболее чувствительных радиотехнических устройств, применяемых для регистрации малых механических смещений. Обычно емкостный датчик представляет собой электрический колебательный контур с воздушным конденсатором (рис. 29), одна из

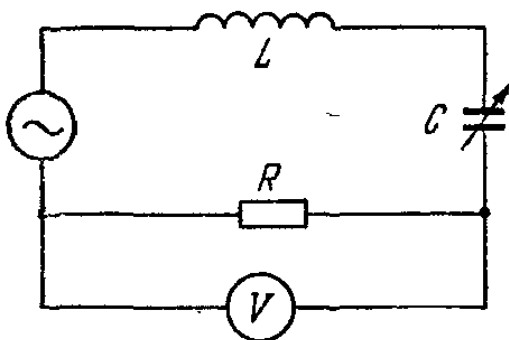


Рис. 29.

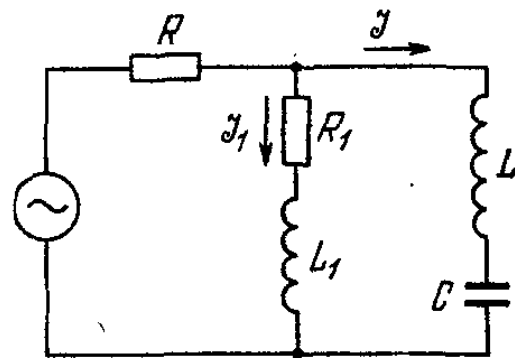


Рис. 30.

пластин которого подвижна. Оценить минимально измеряемое перемещение пластины конденсатора Δd , если контур настроен в резонанс; напряжение источника питания $U = 100$ В, минимально измеряемое изме-

нение напряжения на сопротивлении $\Delta V = 10 \text{ мкВ}$, добротность контура $Q = 10^3$ и зазор между пластинами $d = 1 \text{ мм}$.

3.69. В схеме, изображенной на рис. 30, действует переменная э. д. с., изменяющаяся по закону $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos^2 \Omega t$. Определить токи \mathcal{I} и \mathcal{I}_1 , если известно, что параметры цепи удовлетворяют соотношению $\Omega^2 = 1/4LC$.

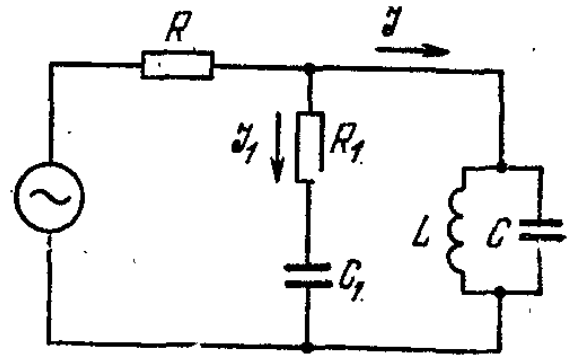


Рис. 31.

3.70. В схеме, изображенной на рис. 31, действует переменная э. д. с., изменяющаяся по закону $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos^2 \Omega t$. Определить токи \mathcal{I} и \mathcal{I}_1 , если известно, что параметры цепи удовлетворяют соотношению $\Omega^2 = 1/4LC$.

3.71. Параметры R и C схемы, изображенной на рис. 32, заданы. При какой частоте Ω выходное напряжение $U_{\text{вых}}$ будет находиться в фазе со входным напряжением $U_{\text{вх}}$? Каким при этом будет отношение амплитуд напряжений $U_{\text{вых}}$ и $U_{\text{вх}}$?

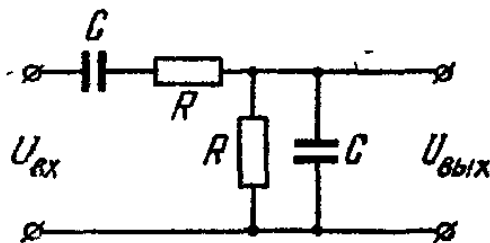


Рис. 32.

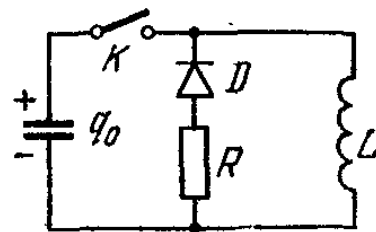


Рис. 33.

3.72. В схеме, изображенной на рис. 33, в некоторый момент времени замыкают ключ K и конденсатор C , имеющий первоначальный заряд q_0 , начинает разряжаться через индуктивность L . Когда ток разряда достигает максимального значения, ключ K вновь размыкают. Какой заряд протечет через сопротивление R ? Сопротивление диода D в схеме в прямом направлении много меньше R , в обратном — бесконечно велико.

3.73. Вблизи катушки колебательного контура с параметрами L_1 , C и R расположена вторая катушка с индуктивностью L_2 . Взаимная индуктивность между катушками есть M . Какой будет резонансная частота

контура, если выводы второй катушки замкнуть накоротко? Считать, что индуктивное сопротивление второй катушки на частоте колебаний контура значительно больше ее активного сопротивления.

IV. ОПТИКА

4.1. Спектрограф имеет объектив коллиматора диаметра D с фокусным расстоянием F_1 и объектив камеры того же диаметра с фокусным расстоянием F_2 . Источник с яркостью B резко отображается на входную щель спектрографа при помощи конденсора один раз с увеличением (расстояние от конденсора до щели равно b_1), другой раз с уменьшением (расстояние b_2). Каков должен быть диаметр конденсора, чтобы в обоих его положениях освещенность на фотопластинке была одинаковой? Чему равна освещенность в этом случае, если пренебречь потерями на отражение и поглощение?

4.2. Радиоизлучение космического источника, имеющего угловой размер ψ , принимается горизонтальным вибратором, служащим антенной. Вибратор расположен на отвесном берегу на высоте h от уровня моря. Рассматривая поверхность воды как плоское зеркало, определить, как будет меняться интенсивность принимаемого сигнала в зависимости от угла α возвышения источника над горизонтом. При каких значениях углового размера источника интенсивность принимаемого сигнала не будет

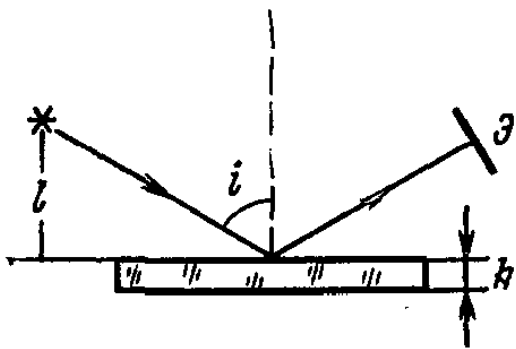


Рис. 34.

зависеть от α ? Для простоты расчеты провести для малых значений α и ψ . Длина волны λ задана.

4.3. Источник света S расположен на расстоянии $l = 1$ м от тонкой слюдяной пластинки толщины $h = 0,1$ мм с показателем преломления $n = 1,4$ (рис. 34).

На таком же расстоянии от пластинки расположен небольшой экран \mathcal{E} , ориентированный перпендикулярно отраженным лучам, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Угол $i = 60^\circ$. 1) Определить порядок интерференционной полосы в центре экрана. 2) Найти

ширину интерференционных полос. 3) Оценить допустимый размер источника. 4) Оценить допустимую некогерентность $\Delta\lambda$. В эксперименте используется свет с длиной волны $\lambda = 5600 \text{ \AA}$.

4.4. С помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность, наблюдают интерференционные полосы в тонкой плоскопараллельной стеклянной пластинке толщины $h = 0,2 \text{ мм}$ с показателем преломления $n = 1,41$; при этом угол наблюдения i может изменяться от 0 до 90° (рис. 35). 1) Найти максимальный и минимальный порядок интерференционных полос. 2) Оценить допустимую некогерентность источника, при которой будут достаточно четко наблюдаться все интерференционные полосы. 3) Каков допустимый размер источника света в этом интерференционном эксперименте? Используется зеленый свет ($\lambda = 5600 \text{ \AA}$).

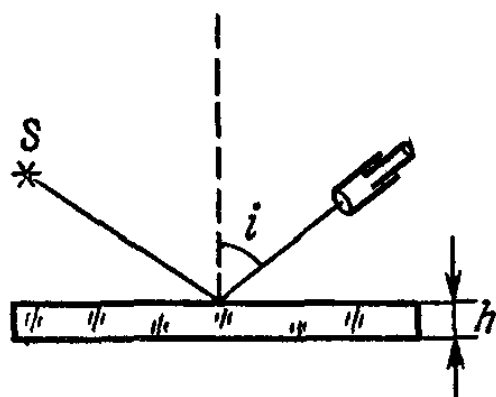


Рис. 35.

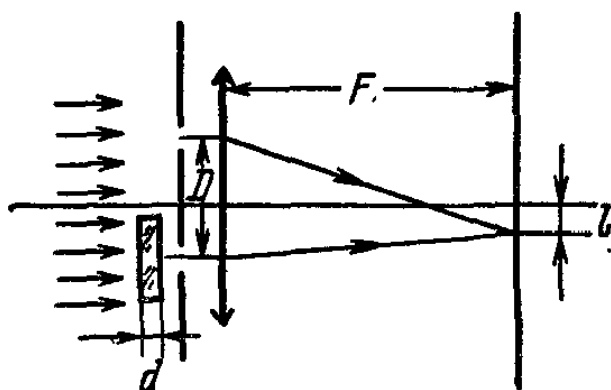


Рис. 36.

4.5. В интерферометре Рэлея (рис. 36) плоская волна испытывает дифракцию на двух щелях. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием $F = 100 \text{ см}$. Одну из щелей закрывают плоскопараллельной пластинкой диспергирующего вещества толщины $d = 0,01 \text{ мм}$ с законом дисперсии $n(\lambda) = A - B\lambda$, где A и B — некоторые постоянные. При этом белая (ахроматическая) полоса смещается на расстояние $l = 4 \text{ мм}$. Определить постоянную A , если известно, что расстояние между щелями $D = 1 \text{ см}$.

4.6. Как сильно смещаются интерференционные полосы, полученные с помощью пластинки Луммера — Герке, при изменении температуры на 1°C ? Ответ дать в относительных единицах (за единицу принять расстояние между соседними полосами). Толщина пластинки $d = 2 \text{ см}$, показатель преломления $n = 1,5$, температур-

ный коэффициент линейного расширения стекла $\alpha = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, длина волны света $\lambda = 5000 \text{ \AA}$. Зависимостью n от температуры пренебречь.

4.7. Интерферометр Фабри — Перо (рис. 37) состоит из двух плоских зеркал с коэффициентом отражения (по интенсивности) $\rho = 99\%$, расположенных на расстоянии $L = 10 \text{ см}$ друг от друга. На интерферометр, используемый в качестве оптического резонатора, падает плоская монохроматическая волна. Оценить ширину резонансной кривой (в мегагерцах) и определить частотный интервал между двумя соседними резонансами.

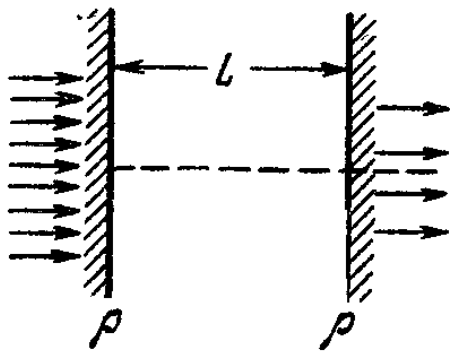


Рис. 37.

4.8. Два пучка белого света, полученные от одного точечного источника, сводятся на входной щели оптического спектрального прибора. Разность хода $\Delta = 300 \text{ м}$. Оценить разрешающую силу спектрального прибора, способного обнаружить интерференцию этих пучков.

4.9. Два пучка белого света от одного источника приходят в точку наблюдения P (рис. 38, а) с разностью хода Δ . С помощью спектроскопа высокой разрешающей силы исследуется распределение энергии в спектре колебания, возникающего в точке P при наложении обоих пучков. Оказалось, что наблюдаются чередующиеся максимумы и минимумы спектральной интенсивности $I(\nu)$, причем частотное расстояние между соседними максимумами $\Delta\nu = 10 \text{ МГц}$ (рис. 38, б). Определить разность хода Δ .

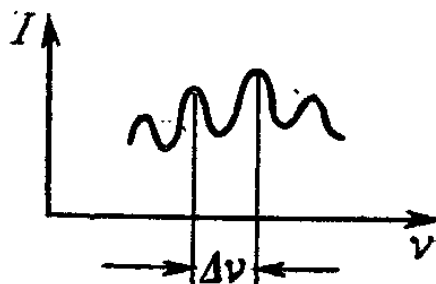
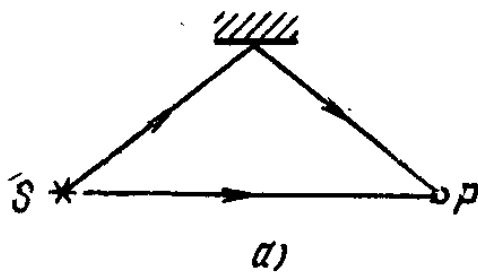


Рис. 38.

4.10. Электрон движется в вакууме со скоростью v вблизи поверхности дифракционной решетки с периодом d . Скорость электрона параллельна поверхности решетки и перпендикулярна ее штрихам. Какие длины волн могут излучаться под углом θ к нормали решетки из-за взаимодействия электрона с решеткой? (Эффект Смита — Парселла.)

4.11. Параболическое зеркало диаметра 1 м используется как антенна для волн с $\lambda = 3$ см. Оценить наименьшее расстояние, на котором следует поместить приемник для снятия диаграммы направленности.

4.12. Плоская волна проходит через стеклянную пластинку с показателем преломления $n = 3/2$, падая на ее поверхность нормально. Толщина пластинки испытывает скачкообразное изменение на величину $b = 2/3\lambda$ вдоль прямой, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости рис. 39. Найти интенсивность света в точке O , лежащей в плоскости, проходящей через точку C , если интенсивность света в этой точке в случае плоскопараллельной пластинки (т. е. при $b = 0$) равна I_0 .

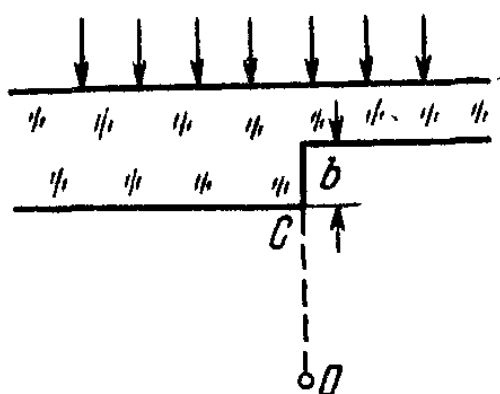


Рис. 39.

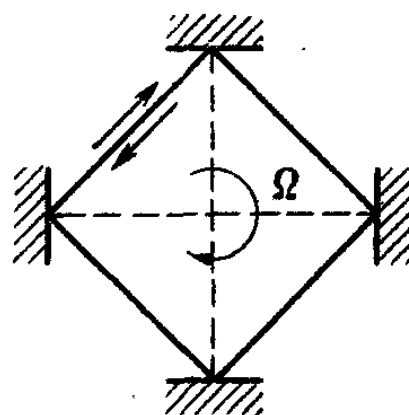


Рис. 40.

4.13. В оптическом резонаторе, состоящем из четырех плоских зеркал (рис. 40), световые волны могут распространяться во встречных направлениях по периметру квадрата, сторона которого равна l . Если такой резонатор привести во вращение с угловой скоростью Ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка, резонансные частоты для встречных волн оказываются неодинаковыми. Объяснить явление и определить разность этих частот.

4.14. Оценить длительность светового импульса от одной грани восьмигранного вращающегося зеркала, расположенного на расстоянии

$L = 200$ м от точечного источника света. Световой импульс регистрируется фотоумножителем с малой шириной входной щели, расположенным вблизи источника (рис. 41).

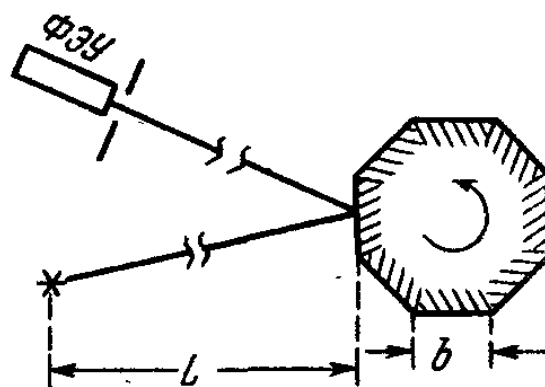


Рис. 41.

Ширина грани зеркала $b = 1$ см. Длину волны света принять равной $\lambda = 5000 \text{ \AA}$. Зеркало вращается с частотой $\nu = 16$ Гц.

4.15. Линза с фокусным расстоянием $F = 50$ см и диаметром $D = 5$ см освещается параллельным монохроматическим пучком света с длиной волны $\lambda = 6300 \text{ \AA}$. Во сколько раз интенсивность волны в фокусе линзы превышает интенсивность волны, падающей на линзу? Оценить размер пятна в фокальной плоскости.

4.16. Ракета удаляется от Земли и перестает быть видимой на фоне неба в телескопе с объективом $D_1 = 80$ мм, когда она находится на расстоянии $L_1 = 2 \cdot 10^4$ км от Земли. На каком расстоянии от Земли удастся заметить эту ракету в телескоп с объективом $D_2 = 200$ мм при той же контрастной чувствительности глаза?

4.17. Излучение лазера непрерывного действия на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм мощностью $P = 10$ мВт направляется на спутник с помощью телескопа, объектив которого имеет диаметр $D = 30$ см. Свет, отраженный спутником, улавливается другим таким же телескопом и фокусируется на фотоприемник с пороговой чувствительностью $P_{\text{пор}} = 10^{-14}$ Вт. Оценить максимальное расстояние до спутника, на котором отраженный сигнал еще может быть обнаружен. Поверхность спутника равномерно рассеивает падающий свет при коэффициенте отражения $\rho = 90\%$. Диаметр спутника $d = 20$ см.

4.18. С какого расстояния можно увидеть невооруженным глазом свет лазера, генерирующего в непрерывном режиме мощность $P = 10$ Вт на частоте $\nu = 4 \cdot 10^{15}$ Гц, если для формирования луча используется параболическое зеркало диаметра $D = 50$ см? Глаз видит источник, если в зрачок (диаметр зрачка $d = 5$ мм) попадает $n = 60$ квантов в секунду с частотой, лежащей в зеленой части спектра.

4.19. При аэрофотосъемке местности используется объектив с фокусным расстоянием $F = 10$ см и диаметром $D = 5$ см. Съемка производится на фотопленку, имеющую разрешающую способность $N = 100$ линий на миллиметр. Определить, какие детали местности могут быть разрешены на фотографиях, если съемка производилась с высоты $h = 10$ км.

4.20. Объектив телескопа имеет фокусное расстояние $F_1 = 3$ м и диаметр $D = 15$ см. Определить фокусное

расстояние окуляра F_2 , при котором полностью используется разрешающая способность объектива, если диаметр зрачка глаза $d = 3$ мм. Предполагая, что в системе телескоп — глаз отсутствуют aberrации, оценить, на каком расстоянии с помощью такого телескопа можно читать книгу с размером букв $l \approx 2$ мм.

4.21. Космонавты прибыли на Луну. Чтобы сообщить об этом на Землю, они растягивают на поверхности Луны черный круглый тент. Каким должен быть радиус этого круга, чтобы его можно было заметить с Земли в телескоп с объективом $D = 5$ м? Контрастная чувствительность приемника 0,01.

4.22. Блестящий металлический межпланетный корабль поперечного размера $d = 10$ м опустился на поверхность Луны в полнолуние. Оценить диаметр зеркала телескопа D , в который можно с Земли увидеть прибытие корабля, если контрастность, надежно обнаруживаемую глазом, принять равной $k = 0,15$; отражательная способность лунной поверхности $\rho_1 = 0,1$, а металла $\rho_2 = 1$. Расстояние от Земли до Луны $L = 4 \cdot 10^5$ км, наблюдение ведется в свете с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм.

4.23. Угловая апертура электронного микроскопа равна 10^{-4} , а оптического — порядка 1. При каком напряжении, ускоряющем электроны, разрешающая сила этих приборов будет одинакова?

4.24. Спектральные линии, излучаемые нагретым газом, оказываются уширенными вследствие того, что атомы газа движутся с разными скоростями относительно наблюдателя (эффект Доплера). Считая распределение скоростей атомов газа максвелловским, оценить размеры дифракционной решетки, которую надо использовать для изучения формы спектральных линий, излучаемых неоном Ne^{20} при температуре $T = 1000$ К. Период решетки $d = 1$ мкм.

4.25. Оценить порядок величины скорости, с которой должен удаляться от Солнца космический корабль, чтобы находящийся в нем космонавт, имея в распоряжении спектрометр с дифракционной решеткой, мог заметить движение корабля относительно Солнца при наблюдении видимой части спектра солнечного водорода во втором порядке. Какое число штрихов должна иметь при этом дифракционная решетка? Температура поверхности Солнца $T = 6000$ К.

4.26. Двойная звезда состоит из двух близких по массе звезд, вращающихся с периодом $\tau \approx 10$ сут и отстоящих друг от друга на расстояние $L = 2 \cdot 10^7$ км. Определить, какое число штрихов дифракционной решетки необходимо для того, чтобы при наблюдении видимого спектра водорода в излучении этих звезд можно было во втором порядке заметить их относительное вращение. Можно ли в принципе таким способом заметить относительное вращение таких звезд, если период вращения равен 10 годам? Температура поверхности звезд $T = 6000$ К.

4.27. Излучение рубинового лазера рассеивается на звуковых колебаниях в воде. При рассеянии света происходит доплеровское смещение частоты. Оценить число штрихов дифракционной решетки, с помощью которой в первом дифракционном порядке можно обнаружить смещение частоты в свете, рассеянном под прямым углом. Скорость звука в воде $v = 1400$ м/с, коэффициент преломления $n = 1,3$. Считать, что в воде есть звуковые волны всевозможных направлений.

4.28. Какое число штрихов должна иметь дифракционная решетка, чтобы с ее помощью в спектре испускания Солнца (во время полного солнечного затмения) можно было обнаружить гравитационное смещение спектральных линий? Наблюдение ведется во втором порядке. Данные, необходимые для числовых расчетов, можно получить, зная угловой диаметр Солнца (при наблюдении с Земли) $\alpha \approx 0,01$ рад и скорость движения Земли по ее орбите $v = 30$ км/с.

4.29. Определить разрешающую силу спектрометра инфракрасного диапазона, работающего по следующему принципу. Излучение исследуемого ИК-источника в диапазоне $\lambda_{ИК} \approx 3$ мкм смешивается в нелинейном кристалле с излучением стабильного аргонового лазера. При этом возникает излучение на суммарной частоте, лежащей в оптическом диапазоне. Последнее анализируется с помощью интерферометра Фабри — Перо, зеркала которого отстоят друг от друга на расстояние $L = 1$ см и имеют коэффициент отражения $\rho = 0,9$.

4.30. На четвертьволновую кварцевую пластинку падает нормально пучок плоскополяризованного света с длиной волны $\lambda = 6280$ Å и мощностью $P = 3$ Вт.

При каких условиях пластинка будет испытывать крутящий момент и каковы его величина и направление?

4.31. На периодическую структуру, состоящую из тонких параллельных диэлектрических пластин (рис. 42), падает плоская монохроматическая волна. Толщина пластин d_0 , расстояние между ними d . Диэлектрическая проницаемость пластин ϵ_1 , окружающей среды ϵ . Длина волны значительно больше d_0 и d . Показать, что структура аналогична одноосному кристаллу, и определить показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей.

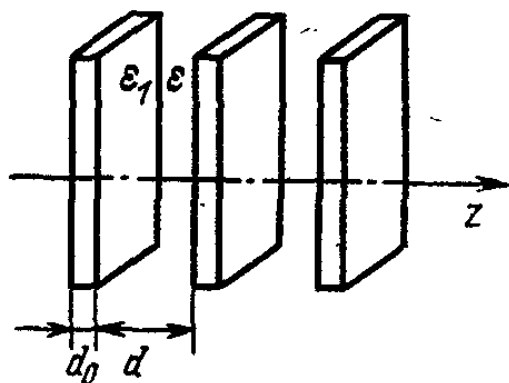


Рис. 42.

4.32. На систему, состоящую из чередующихся поляроидов и пластинок кварца, вырезанных параллельно оптической оси (рис. 43), падает плоская монохроматическая волна с частотой ω . Главные направления всех поляроидов параллельны и составляют угол 45° с оптической осью пластинок. Волна поляризована вдоль главного направления поляроида. Определить амплитуду

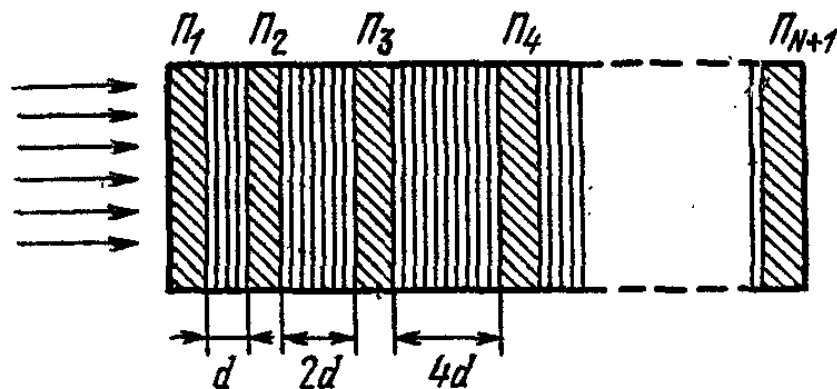


Рис. 43.

волны на выходе из системы, если на входе она равна A_0 . Система состоит из N пластинок и $N + 1$ поляроидов. Толщина пластинок равна $d, 2d, \dots, 2^{N-1} d$. Показатели преломления кварца n_o и n_e . Отражением света на границах пластинок и поляроидов пренебречь. Является ли такая система спектральным прибором?

4.33. Найти показатель преломления газа и его градиент по высоте на поверхности Венеры, атмосфера которой состоит из углекислого газа CO_2 с поляризуемостью молекулы $\alpha = 2,7 \cdot 10^{-23} \text{ см}^3$. Давление на Венере

$p_0 = 100$ атм, температура $T = 500$ °С. Найти кривизну светового луча, пущенного горизонтально. К каким особенностям атмосферной оптики планеты приводит найденное значение?

Примечание. Радиус R кривизны горизонтального луча определяется соотношением $\frac{1}{R} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dh}$.

4.34. Во сколько раз должна увеличиться плотность атмосферы Земли для того, чтобы в ней, как на Венере, возникла круговая рефракция, при которой луч света обойдет Землю? Показатель преломления воздуха при атмосферном давлении $n_0 = 1,0003$ (см. задачу 4.33).

4.35. Линза с относительным отверстием $1 : 3,5$ собирает солнечный свет на поверхности черного шарика, помещенного в вакууме. До какой температуры может нагреться шарик, диаметр которого равен диаметру изображения Солнца, если Солнце видно с Земли под углом $\alpha = 0,01$ рад и солнечная постоянная равна $\beta = 0,14$ Вт/см²?

4.36. При какой мощности P лазерный луч диаметром $D = 1$ мм вызывает электрический пробой газа?

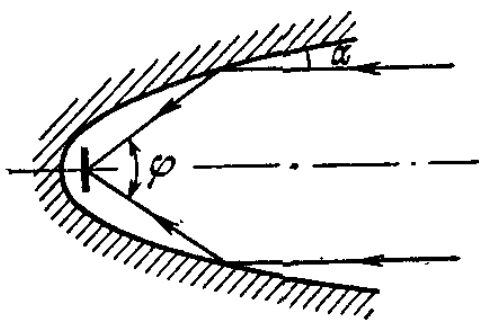


Рис. 44.

Свободный пробег электронов в газе при условиях опыта равен $\Lambda = 10^{-4}$ см. Потенциал ионизации газа $U = 10$ В.

4.37. Зеркало в виде сильно вытянутого параболоида вращения фокусирует мягкие рентгеновские лучи благодаря полному внутреннему отражению при скользящих углах падения α на далекие от вершины части параболоида (рис. 44). Оценить угол схождения лучей φ в фокусе параболоида для рентгеновских лучей с энергией 2 кэВ, если зеркало изготовлено из бериллия (плотность бериллия $\rho = 1,82$ г/см³).

4.38. Определить число свободных электронов на атом Ag, если пленка серебра прозрачна для ультрафиолета, начиная с энергии 5 эВ. Для серебра массовое число $A = 108$, плотность $\rho = 10,5$ г/см³.

4.39. Показатель преломления ионосферы для радиоволн с частотой 10 МГц равен 0,90. Найти концентрацию электронов в ионосфере, а также фазовую и групповую скорости для этих радиоволн.

4.40. Луч лазера фокусируется идеальной оптической системой с $F/D = 1$. Оценить мощность лазера P , при которой в электрическом поле фокуса системы электроны смогут приобретать энергию $\approx mc^2$.

4.41. Из точки A (рис. 45) на спутник, летящий со скоростью v , падает лазерный луч с частотой ω_0 . Отраженный луч регистрируется в точке B . Чему будет равна частота принимаемого света? Оценить разрешающую способность регистрирующего спектрального прибора, необходимую для обнаружения релятивистской поправки к смещению частоты.

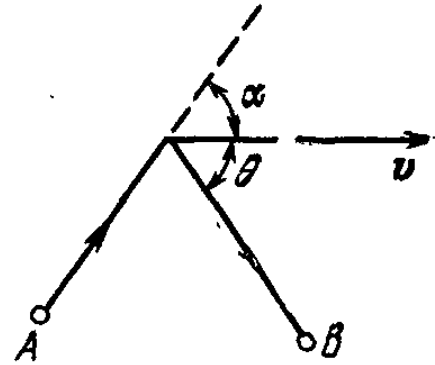


Рис. 45.

4.42. С целью проверки теории относительности предполагается с помощью радиоволн точно измерить параметры орбиты спутника Земли. Однако из-за преломления радиоволн в ионосфере, где средняя концентрация электронов $N = 10^5 \text{ см}^{-3}$, возникают ошибки измерений. Оценить минимальную частоту, на которой следует проводить такие наблюдения.

4.43. Известно, что ускорение космической ракеты тем больше, чем выше скорость истечения газа из ее сопла. С этой точки зрения наилучшей является так называемая фотонная ракета, испускающая из сопла поток фотонов. Рассчитать, какую скорость может приобрести такая ракета при разгоне от нулевой скорости, если половина ее массы превратится в фотоны. К. п. д. двигателя считать равным 1.

4.44. После 16 оборотов вблизи Земли спутник опустился обратно на космодром. На сколько разошлись часы на спутнике и на космодроме и с какой точностью можно заметить этот эффект, если стабильность и воспроизводимость часов составляет 10^{-13} (водородный ма-зер)? Влиянием кривизны траектории, силы притяжения к Земле и ускорения во время взлета и посадки спутника на ход часов спутника пренебречь.

V. АТОМНАЯ ФИЗИКА

5.1. Определить энергию γ -квантов, претерпевших комптоновское рассеяние назад ($\varphi = 180^\circ$), если вылетающий электрон ультрарелятивистский ($E \gg mc^2$).

5.2. Определить длину волны рентгеновских лучей, для которых комптоновское рассеяние на угол 90° удваивает длину волны.

5.3. В рентгеновском спектрографе, работающем по методу интерференционного отражения Вульфа — Брэгга, применяется кристаллическая пластинка. При какой минимальной толщине D этой пластинки можно обнаружить комптоновское смещение при рассеянии фотонов под углом $\varphi = 90^\circ$ к первоначальному направлению? Длина волны рентгеновского излучения $\lambda = 0,7 \text{ \AA}$. Рассеянное излучение падает на кристалл под углом скольжения $\theta = 30^\circ$.

5.4. В результате комптоновского рассеяния фотона на покоящемся электроне последний получил импульс отдачи p . Определить, под какими углами φ по отношению к направлению падающего фотона мог вылететь электрон с таким импульсом.

5.5. Оценить угол, на который отклоняется фотон вследствие гравитационного взаимодействия, проходя у поверхности Солнца ($M_c = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}$, $R_c = 7 \cdot 10^{10} \text{ см}$).

5.6. Параллельный пучок моноэнергетических нейтронов, движущихся со скоростью v , падает на плоскую поверхность кристалла под углом скольжения φ_0 и испытывает на ней брегговское отражение m -го порядка (рис. 46). Источник нейтронов приводят в движение с постоянной скоростью u в направлении нормали к отражающей плоскости. Под каким углом φ к отражающей плоскости надо направить теперь пучок нейтронов, чтобы наблюдалось брегговское отражение в прежнем порядке m ?

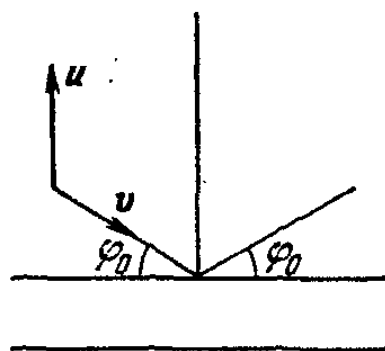


Рис. 46.

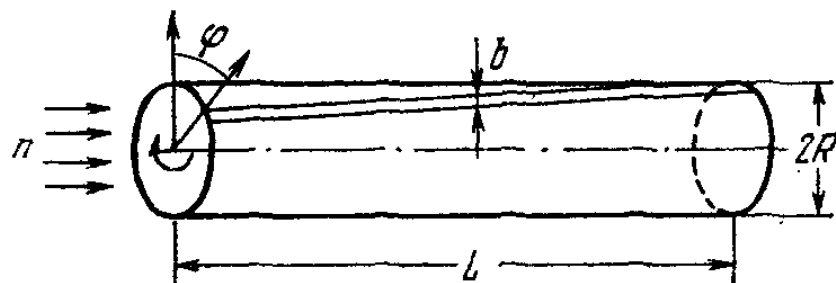


Рис. 47.

5.7. Один из способов монохроматизации медленных нейтронов состоит в следующем. В цилиндре радиуса $R = 10 \text{ см}$ и длины $L = 1,0 \text{ м}$ делается винтовой паз шириной $b = 1 \text{ см}$ с поворотом на угол $\varphi = 30^\circ$ (рис. 47).

Цилиндр вращается с частотой $\nu = 3000$ об/мин. Определить длину волны нейтронов, пропускаемых описанным монохроматором, и оценить степень их монохроматизации. Пучок нейтронов направлен вдоль оси цилиндра.

5.8. Оценить минимальный диаметр D пятна, создаваемого на детекторе пучком атомов серебра, испускаемых печью с температурой $T = 1470$ К. Расстояние от выходной щели печи до детектора $L = 1$ м.

5.9. В одномерной яме шириной b с бесконечными стенками находятся N электронов. Определить минимальное значение полной энергии и силу давления электронов на стенки ямы. Взаимодействием электронов пренебречь.

5.10. Оценить кинетическую энергию нуклона в ядре, полагая радиус ядра $r = 10^{-12}$ см.

5.11. Предполагая, что ядерные силы обусловлены обменом между нуклонами квантами ядерного поля — мезонами, оценить радиус действия ядерных сил, если известно, что масса покоя мезонов $mc^2 \approx 100$ МэВ, а их скорость близка к скорости света.

5.12. Электрон движется со скоростью v в плоскопараллельном слое вещества толщины d с показателем преломления n , перпендикулярно ограничивающим плоскостям. Скорость электрона $v > c/n$, так что наблюдается излучение Вавилова — Черенкова. Определить угловой раствор $\Delta\varphi$ излучения, обусловленный конечной толщиной слоя (рис. 48).

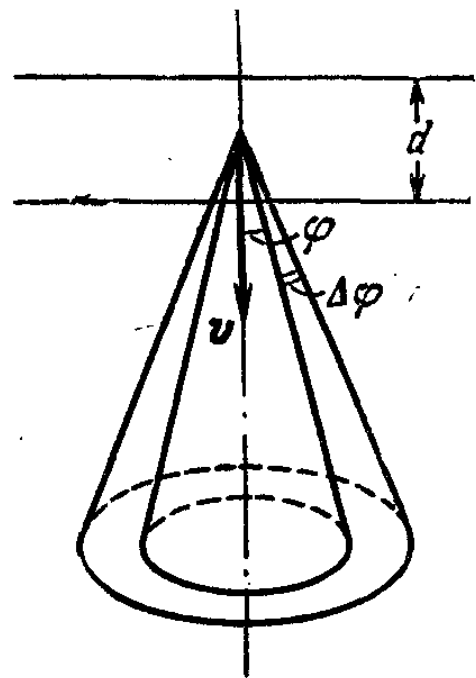


Рис. 48.

5.13. Найти наименьшее значение энергии электрона, при которой он беспрепятственно пройдет над прямоугольной потенциальной ямой глубиной $U = -5$ эВ и шириной $b = 10^{-8}$ см.

5.14. Длина волны линии H_α водородной серии Бальмера равна $\lambda = 6563$ Å. Определить потенциалы ионизации позитрония и мюония, находящихся в основном состоянии. Масса мюона $m_\mu = 214 m_e$ (m_e — масса электрона).

5.15. Рассчитать энергию излучения, испускаемого при переходе отрицательного мюона в атоме водорода с N - на M -оболочку. Масса мюона $m_\mu c^2 = 106$ МэВ. При расчете учесть, что такая масса примерно в 10 раз меньше массы протона. Как велик радиус боровской орбиты в этом случае?

5.16. Положительно заряженный мюон, образовавшийся вместе с электроном водородоподобный атом — мюоний, распался на позитрон и нейтрино, быстро разлетевшиеся в разные стороны. Каково среднее значение кинетической энергии оставшегося после этого электрона, если в момент распада мюона мюоний находился в состоянии $2S$? Волновая функция электрона

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{8\pi r_1^3}} \left(1 - \frac{r}{2r_1}\right) e^{-r/2r_1},$$

где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

5.17. Задача об отыскании уровней энергии атомов обычно решается в предположении, что заряд ядра точечный. На самом деле ядра имеют конечные размеры, и радиусы ядер оцениваются с помощью соотношения $r_{\text{я}} = 1,3 \cdot 10^{-13} \sqrt[3]{A}$ см, где A — относительная атомная масса. Оценить знак и порядок величины относительной поправки $\Delta E/E$ к энергии мю-мезона на K -оболочке в мезоатоме неона ($Z = 10$, $A = 20$), связанной с тем, что часть времени мезон находится внутри ядра, т. е. в поле с потенциалом, отличным от Ze^2/r . Нормированное выражение для волновой функции основного состояния электрона в атоме водорода

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1},$$

где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

5.18. При комптоновском рассеянии квантов на атомных электронах явление осложняется тем, что электроны в атомах не находятся в покое. Оценить связанный с этим разброс в углах разлета электронов отдачи, выбиваемых из атомов водорода при рассеянии рентгеновских квантов с длиной волны $\lambda = 1$ Å строго назад.

5.19. Параллельный пучок атомов, находящихся в одном возбужденном состоянии, движется вдоль оси вакуумной трубки со скоростью $v = 10^8$ см/с. В стенках сделаны окошки для регистрации излучения атомов пучка

в зависимости от пути, пройденного пучком по трубке. Результаты этих измерений изображены на рис. 49. (По оси абсцисс отложено расстояние, пройденное пучком вдоль трубки, отсчитанное от первого окошка, а по оси ординат — натуральный логарифм отношения интенсивности света $\mathcal{I}(x)$ и интенсивности, измеренной детектором, стоящим в первом окошке.) Определить естественную ширину линии, излучаемой атомами пучка.

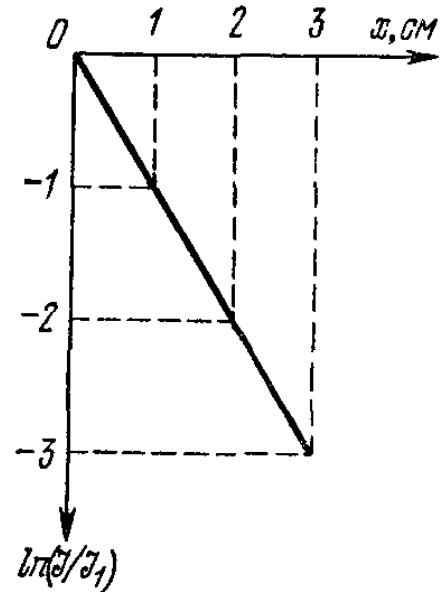


Рис. 49.

5.20. Оценить минимальный размер железной пылинки, при котором можно наблюдать эффект Мёссбауэра с энергией перехода $E = 14$ кэВ и временем жизни $\tau = 10^{-3}$ с, если отдача пылинки приведет к доплеровскому смещению, равному собственной ширине линии.

Примечание. Эффект Мёссбауэра заключается в том, что при достаточно низкой температуре отдачу испытывает не отдельное излучившее ядро, а весь кристалл (в данном случае — пылинка).

5.21. На какой высоте H надо поместить поглотитель относительно источника для обнаружения красного смещения общей теории относительности? Используется эффект Мёссбауэра на изотопе Zn^{67} . Время жизни возбужденного уровня с энергией $E = 93$ кэВ равно $\tau = 10^{-5}$ с. Считать, что для достижения необходимой точности эффект смещения должен в 10 раз превышать ширину линии резонансного поглощения Γ .

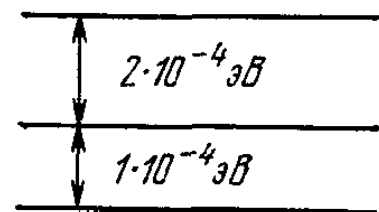


Рис. 50.

5.22. На опыте измерены энергии перехода между тремя последовательными уровнями энергии вращательной полосы двухатомной молекулы (рис. 50). Найти орбитальные квантовые числа l этих уровней и момент инерции I молекулы.

5.23. В опытах Шалла (1968 г.) наблюдалось расщепление пучка нейтронов на два пучка при преломлении на границе однородного магнитного поля. Найти малый угол θ между направлениями преломленных пучков.

Однородное магнитное поле имеет индукцию $B \approx 2,5$ Т. Нейтроны с длиной волны $\lambda = 5$ Å падают под углом в 30° к достаточно резкой границе магнитного поля.

5.24. Пучок атомов натрия вылетает из печи, температура которой $T = 700$ К. Пучок расщепляется в поперечном неоднородном магнитном поле с градиентом $dB/dx = 5$ Т/см на пути $l = 10$ см. Детектор удален от магнита на расстояние $L = 65$ см. Найти расстояние между пятнами на экране.

5.25. Пучок атомов лития в основном состоянии с максимальной энергией $E_k = 0,1$ эВ проходит через магнит Штерна — Герлаха длиной $L_1 = 6$ см с градиентом поля $dB/dx = 5$ Т/см. Перед магнитом стоят две одинаковые диафрагмы D на расстоянии $L = 1$ м друг от друга (рис. 51). При каком максимальном размере диафрагм компоненты разделенного пучка полностью разойдутся?

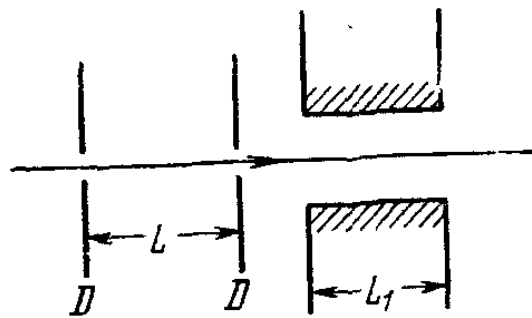


Рис. 51.

5.26. Оценить, каким должно быть расстояние L между зеркалами в интерферометре Фабри — Перо, чтобы с его помощью можно было наблюдать зеемановское расщепление в магнитном поле, индукция которого $B = 1$ Т. Зеркала интерферометра посеребрены так, что между ними наблюдается $N \approx 20$ отражений.

5.27. Оценить, какую величину магнитного поля звезды типа Солнца (период вращения $\tau = 10^6$ с, радиус $R = 10^{10}$ см, температура поверхности $T = 6 \cdot 10^3$ К) можно обнаружить в оптической области спектра ($\omega = 10^{15}$ с⁻¹) на основании измерения эффекта Зеемана.

5.28. Цезий принадлежит к щелочным металлам. При $P - S$ -переходе в атомарном цезии испускается широкий дублет, состоящий из двух линий: $\lambda_1 = 4555$ Å и $\lambda_2 = 4593$ Å. Нарисовать картину расщепления термов этого дублета в магнитном поле. Какими формулами описывается в этом случае расщепление линий в магнитном поле с индукцией $B = 3$ Т; формулами для нормального или аномального эффекта Зеемана?

5.29. В спектре лития две первые линии главной серии принадлежат переходам $2^2P_{1/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$ и $2^2P_{3/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$. Длины волн этих линий равны 6707,80 и

6707,95 А. Оценить величину магнитного поля, которое создает орбитальное движение электрона в атоме лития в состоянии $2P$.

5.30. Оценить (в электронвольтах) расщепление $2P$ -состояния позитрония, вызванное взаимодействием спиновых магнитных моментов позитрона и электрона.

5.31. Оценить по порядку величины расщепление головной линии серии Бальмера в спектре водорода за счет взаимодействия магнитного момента электрона и магнитного момента ядра (сверхтонкое расщепление спектральных линий). Можно ли обнаружить это расщепление с помощью спектрального прибора, если среднее время жизни Δt возбужденных атомов водорода порядка 10^{-8} с? Магнитный момент протона равен 2,8 ядерного магнетона.

5.32. Оценить по порядку величины длину волны излучения межзвездного атомарного водорода в радиодиапазоне. Межзвездный водород находится в основном состоянии, и его излучение обусловлено переориентацией спина электрона.

5.33. Свободные атомы могут обладать магнитным моментом, но не иметь дипольного электрического момента. Атомы, входящие в состав кристаллической решетки, при известных условиях могут иметь такой момент. В этом случае возможен параэлектрический резонанс, аналогичный парамагнетизму. Найти дипольный момент атома, если известно, что резонансное поглощение электромагнитных волн с длиной волны $\lambda = 5$ мм наблюдается при напряженности постоянного электрического поля $E = 2,5 \cdot 10^3$ кВ/м. Оценить размер атомного диполя.

5.34. Жидкий гелий обладает отрицательной работой выхода для избыточных электронов. Поэтому электрон, введенный в гелий, расталкивает атомы жидкости и образует в ней сферическую полость, которая является для электрона потенциальной ямой с практически бесконечно высокой стенкой. Вычислить радиус полости R , когда электрон занимает в полости низший квантовый уровень. Поверхностное натяжение жидкого гелия $\sigma = 0,35$ дин/см. Внешнее давление считать равным нулю. Поляризуемостью гелия пренебречь (из-за малости его диэлектрической восприимчивости).

5.35. В жидком гелии вокруг электрически заряженной частицы, например иона He^+ , образуется область

повышенного давления и в непосредственной близости от заряда гелий затвердевает. Причиной повышения давления является притяжение атомов гелия к электрическому заряду за счет поляризуемости их электронной оболочки. Найти радиус R образовавшегося шарика из твердого гелия, если плотность гелия $\rho = 0,145 \text{ г/см}^3$, молярная поляризуемость $\alpha N_A = 0,125 \text{ см}^3/\text{моль}$, а давление затвердевания $p_{\text{ТВ}} = 25 \text{ атм}$. Пренебречь сжимаемостью гелия. Внешнее давление отсутствует. Считать, что размер шарика значительно превышает атомный размер.

VI. ИЗЛУЧЕНИЕ

6.1. Над плоскостью, зачерненной с двух сторон, на высоте H расположен круглый диск, являющийся источником теплового излучения с температурой T_0 . Радиус диска $R \ll H$; диск параллелен плоскости. Найти стационарное распределение температуры на плоскости. Считать, что система находится в вакууме, фон теплового излучения отсутствует и теплопроводностью вдоль плоскости можно пренебречь.

6.2. Найти отношение плотностей потока энергии W для корпускулярного и для лучистого излучения Солнца в околоземном пространстве. Считать, что корпускулярное излучение представляет собой нейтральную плазму из электронов и протонов с концентрацией частиц каждого сорта $n = 5 \text{ см}^{-3}$ и скоростью потока $v = 300 \text{ км/с}$ и что Солнце излучает как абсолютно черное тело с температурой $T = 6000 \text{ К}$. Угловой диаметр Солнца принять равным $\alpha = 10^{-2} \text{ рад}$.

6.3. При какой концентрации n молекул газа газокинетическое давление при температуре $T = 100 \text{ К}$ равно давлению равновесного теплового излучения при той же температуре?

6.4. Газообразный неон находится в замкнутом сосуде постоянного объема в равновесии с тепловым излучением при температуре $T = 500 \text{ К}$. При каком давлении неона его теплоемкость сравнивается с теплоемкостью теплового излучения?

6.5. Получить, исходя из фотонной картины, уравнение состояния электромагнитного излучения $p = \frac{1}{3} u$.

Используя это уравнение и применяя к электромагнитному излучению законы термодинамики, найти зависимость от температуры T энергии и энтропии на единицу объема (u и s). Связать константу интегрирования, которая возникает в этом расчете, с постоянной Стефана — Больцмана σ .

6.6. Найти теплоемкость C_p и уравнение адиабаты для равновесного излучения, заключенного в сосуд с переменным объемом.

6.7. Возбужденный атом с энергией возбуждения $E = 1$ эВ находится в поле равновесного излучения с температурой $T = 300$ К. Найти отношение вероятностей индуцированного и спонтанного излучения атома. Найти аналогичное отношение для электронного спина в магнитном поле с индукцией $B = 10^3$ Гс.

6.8. Оценить вероятность спонтанного излучения молекулы $\omega_{\text{сп}}$ при переходе с возбужденного уровня E_m на уровень E_n в случае, когда молекула помещена внутрь объемного резонатора, настроенного на частоту $\omega = (E_m - E_n)/\hbar$. Соответствующая вероятность спонтанного излучения в свободном пространстве равна $\omega_{\text{сп}}^0$. Объем резонатора V , его добротность Q . Считать, что ширина молекулярных уровней Γ все время остается меньше ширины линии резонатора: $\Gamma < \omega/Q$.

6.9. Резонатор лазера с кристаллом рубина имеет одно зеркало с 100%-ным отражением, а другое с пропусканием $\tau = 0,1$ на длине волны, отвечающей генерации лазера. Длина кристалла $L = 12$ см. Известно, что показатель поглощения света в невозбужденном кристалле рубина в максимуме рабочей линии равен $\alpha = 0,4$ см $^{-1}$. Найти, какую часть атомов хрома нужно перевести в возбужденное состояние, чтобы лазер начал работать. Рассеянием света в кристалле пренебречь.

VII. ТВЕРДОЕ ТЕЛО

7.1. Рентгеновский луч с частотой $1,1 \cdot 10^{18}$ Гц, падающий на кубический кристалл в направлении [100], испытывает сильное брэгговское рассеяние в направлении [122]. Считая, что кристалл состоит из одной гранецентрированной решетки Бравэ и наблюдаемое рассеяние связано с интерференцией первого

порядка, найти наименьшее межатомное расстояние в кристалле.

7.2. Найти закон дисперсии для продольных фононов в бесконечной цепочке, содержащей в элементарной ячейке два атома с массами M_1 и M_2 . Расстояния между соседними атомами равны a , а жесткости связей между ними равны γ . Построить график полученной зависимости. Проследить предельный переход к одноатомной цепочке при $M_1/M_2 \rightarrow 1$.

7.3. Найти поляризуемость (в расчете на одну ячейку) для цепочки, содержащей в элементарной ячейке два разноименных однозарядных иона. Остальные условия такие же, как и в задаче 7.2. Электрический вектор возбуждающей электромагнитной волны с частотой ω ориентирован вдоль цепочки.

7.4. Пользуясь законами сохранения энергии и импульса, рассмотреть неупругое однофононное рассеяние нейтронов в идеальном кристалле. Обсудить возможность восстановления закона дисперсии фононов по нейтронному рассеянию.

7.5. Для частот колебаний молекул и кристаллов получить оценочную формулу $\hbar\omega \sim (m/M)^{1/2} E_{\text{ат}}$. Здесь m и M — массы электрона и ядер, а $E_{\text{ат}}$ имеет атомный порядок величины. Для отношения амплитуды нулевых колебаний x_0 к межатомному расстоянию a получить оценку $x_0/a \sim (m/M)^{1/4}$.

7.6. Используя аналогию между фотонами и длинноволновыми фононами, выразить низкотемпературную решеточную теплоемкость кристаллов через скорость поперечного и продольного звука.

7.7. Найти температурную зависимость решеточной теплоемкости одно- и двумерных кристаллов в области низких температур.

7.8. Основываясь на модели двухатомной молекулы со слабым кубическим ангармонизмом, выразить температурный коэффициент расширения α в направлении оси молекулы через параметры потенциала и оценить его. Движение ядер считать классическим.

7.9. Найти энтропию кристаллического гелия-3 при низкой температуре. Ядро гелия-3 имеет спин $I = 1/2$. Считать, что температура $T \ll \Theta$ (Θ — дебаевская температура), так что практически все колебательные степени свободы «выморожены», но ядерные спины остаются

тем не менее полностью разупорядоченными. При этих же предположениях найти энтропию кристалла аргона-37; спин ядра $I = 3/2$ (в единицах \hbar).

7.10. Давление электронного газа является одним из основных факторов, определяющих сжимаемость металлов. Найти коэффициент всестороннего сжатия электронного газа для меди при температуре $T = 0$, если концентрация электронов $n = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Эффективную массу считать равной массе свободного электрона.

7.11. Найти фермиевскую скорость электронов v_F в металле с одним электроном на элементарную ячейку и «одномерным» законом дисперсии $E = E_0 \cos(k_z a)$ при $E_0 = 0,5 \text{ эВ}$ и $a = 3 \text{ \AA}$ ($k = p/\hbar$ — волновой вектор).

7.12. В металле, кристаллическая решетка которого обладает осью симметрии z не ниже третьего порядка, закон дисперсии электронов в простейшем случае может быть представлен в виде $E(\mathbf{p}) = 1/2 m (p_x^2 + p_y^2)$. Считать, что на элементарную ячейку приходится один электрон проводимости, период решетки вдоль оси z равен $a = 3 \text{ \AA}$, объем элементарной ячейки $V = 0,85 a^3$, а m равно массе свободного электрона. Вычислить фермиевскую скорость электронов и определить частоту обращения электронов в магнитном поле H в зависимости от угла θ между вектором \mathbf{H} и осью z .

7.13. В отсутствие электрического тока внешнее статическое электрическое поле проникает лишь в тонкий приповерхностный слой металла. Определить закон, по которому поле убывает вглубь металла, считая, что полное падение потенциала $V \ll E_F/e$ (E_F — фермиевская энергия электронов). Оценить глубину проникновения поля (длину экранирования Томаса — Ферми l_{TF}) для обычного металла ($n_0 \approx 10^{23} \text{ см}^{-3}$, $E_F \approx 5 \text{ эВ}$, диэлектрическая проницаемость $\epsilon \approx 1$) и полуметалла типа Вi ($n_0 \approx 3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $E_F \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}$, $\epsilon \approx 100$). Температура $T = 0$. Диэлектрическая проницаемость ϵ определяется поляризуемостью внутренних электронов, не участвующих в электропроводности.

7.14. Для типичных значений параметров металлов оценить температуру, при которой сравниваются электронная и решеточная теплоемкости, выразив ее через массы электронов и ядер, а также энергию $E_{ат}$, имеющую атомный порядок величины. Произвести также количественную оценку этой температуры.

7.15. В тонких проволочках длины свободного пробега лимитируются диаметром проволочки, поэтому длины свободного пробега электронов и фононов практически совпадают. Оценить температуру, при которой в этих условиях сравниваются электронная и решеточная теплопроводность металлов.

7.16. Найти частоту собственных длинноволновых колебаний электронного газа в проводниках, при которых не возникает магнитных полей (плазменная частота ω_p). «Трением» при движении электронов в кристаллической решетке пренебречь и считать, что динамика электронов описывается эффективной массой m^* . Оценить величину частоты ω_p и кванта $\hbar\omega_p$ для металлов.

7.17. Найти частотную зависимость комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$ проводника. Объяснить прозрачность металлов в ультрафиолетовой области спектра. Считать, что электроны проводимости описываются эффективной массой m^* и временем свободного пробега τ .

7.18. Определить глубину проникновения в металл с удельной проводимостью σ высокочастотного электромагнитного поля с частотой ω . Считать $\omega\tau \ll 1$.

7.19. Вычислить ток, создаваемый электронами, движущимися в скрещенных электрическом и магнитном полях ($\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$). Эффективная масса электронов m^* , а время свободного пробега τ . Применить полученные результаты к вычислению сопротивления в функции H в следующих случаях: а) ток течет по бесконечной пластине, причем \mathbf{E} и \mathbf{H} лежат в плоскости пластины; б) ток течет через диск Корбино

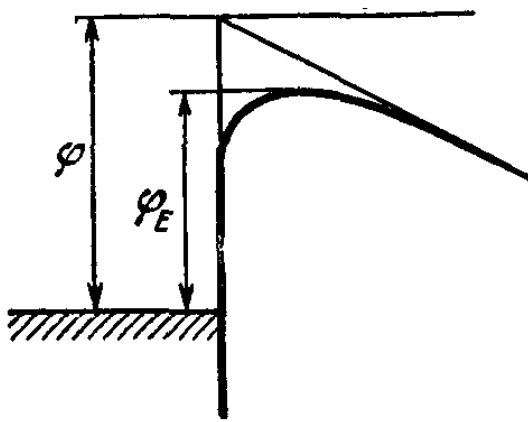


Рис. 52.

течет через диск Корбино (в диске Корбино электроды имеют форму концентрических окружностей, а магнитное поле прикладывается перпендикулярно плоскости диска). Пояснить полученные результаты.

7.20. Термоэлектроны, эмиттированные из металлического катода, движутся в вакууме под действием внешнего поля \mathbf{E} и сил зеркального изображения. Совместное действие этих сил приводит к понижению работы выхода на границе металл —

вакуум. Найти зависимость работы выхода φ_E (рис. 52) и термоэмиссионного тока \mathcal{I} от поля E .

7.21. Найти закон рассасывания объемного заряда в проводниках и характерное время этого процесса — максвелловское время релаксации τ_M . Определить τ_M для кристалла чистого германия при комнатной температуре ($\sigma = 0,014$ См/см, $\epsilon = 16$).

7.22. В полупроводниках, как и в металлах (ср. задачу 7.13), внешнее электрическое поле экранируется электронами проводимости. Отличие состоит в том, что в полупроводниках электронный газ обычно является невырожденным, т. е. подчиняется распределению Больцмана. Определить закон, по которому в этих условиях поле убывает в глубь невырожденного полупроводника, считая внешнее поле слабым. Оценить глубину проникновения l_D (дебаевскую длину экранирования) для полупроводника с диэлектрической проницаемостью $\epsilon \approx 15$ и концентраций электронов $n \approx 10^{14}$ см $^{-3}$.

7.23. Вычислить частоту обращения электрона ω_c (циклотронную частоту) в постоянном однородном произвольно ориентированном поле H при законе дисперсии

$$E(\mathbf{p}) = \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{p_y^2}{2m_y} + \frac{p_z^2}{2m_z}.$$

7.24. Вычислить форму кривой циклотронного резонанса (т. е. зависимость проводимости от частоты) для электронов с изотропной эффективной массой m^* и временем свободного пробега τ . Электромагнитная волна циркулярно поляризована в плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному полю.

7.25. Электрон с законом дисперсии $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(k_x a)$ движется в постоянном однородном электрическом поле E , направленном вдоль оси x . Решить уравнения движения и дать физическую интерпретацию результата.

7.26. Решить предыдущую задачу при наличии силы трения, пропорциональной скорости ($F = -\gamma v$). Исследовать возможные режимы движения электронов и вычислить проводимость такого полупроводника.

7.27. Рассмотреть рассеяние медленного электрона в полупроводнике с поглощением и испусканием длинноволнового акустического фонона, пользуясь законами сохранения энергии и импульса. Найти зависимость угла

между волновым вектором фонона q и начальным импульсом электрона p от p и q . Показать, что при $v < s$ (v — скорость электрона, s — скорость звука) электрон не может испустить фонон, а при $v \gg s$ электроны рассеиваются почти упруго, т. е. энергия при рассеянии меняется мало. Считать, что энергия электрона $E = p^2/2m$, а энергия фонона $\hbar\omega(q) = \hbar sq$.

7.28. В некоторых полупроводниках длина свободного пробега электронов оказывается порядка межатомных расстояний. В такой ситуации движение электронов можно рассматривать как случайные «прыжки» между соседними узлами. Оценить при температуре $T \approx 300$ К удельную проводимость такого полупроводника, если концентрация электронов $n \approx 10^{18}$ см⁻³, средняя частота прыжков $\nu \approx 10^{13}$ с⁻¹, а межатомное расстояние $d \approx 3$ Å.

7.29. Среда, проводимость которой зависит от электрического поля E по закону $\sigma(E) = \sigma_0/[1 + (E/E_0)^2]$, помещена во внешнее однородное поле $E \parallel x$. В этой среде возникла флуктуация плотности объемного заряда $\rho(x)$. Найти, как будет изменяться со временем распределение заряда вдоль оси x . Флуктуацию считать малой.

7.30. Вывести формулу для концентрации зонных электронов в невырожденном полупроводнике с заданным значением химического потенциала ζ (уровня Ферми).

7.31. Найти связь между концентрациями электронов n и дырок p в невырожденном полупроводнике с произвольной концентрацией примесей и концентрацией носителей n_i в том же полупроводнике в отсутствие примесей (т. е. в собственном полупроводнике).

7.32. Исследовать и схематически изобразить на графике температурную зависимость концентраций электронов n и дырок p в полупроводнике с мелкими донорными уровнями. Энергия связи электронов на донорах $2\Delta_1$, ширина запрещенной зоны $2\Delta \gg 2\Delta_1$.

7.33. Найти ридберг, боровский радиус и эффективную массу M для экситона, т. е. водородоподобного образования, построенного из электрона и дырки. Оценить значения этих величин, полагая, что эффективные массы электрона и дырки $m_n^* \sim m_p^* \sim 0,1 m_0$ (m_0 — масса электрона), диэлектрическая проницаемость $\epsilon \approx 10$.

7.34. Дырки, создаваемые при освещении у поверхности электронного полупроводника, диффундируют в объем, где они рекомбинируют с электронами прово-

димости. Определить эффективную глубину проникновения дырок, если их время жизни $\tau = 10^{-3}$ с, подвижность $\mu = 2000$ см²/(В·с), а температура образца $T = 300$ К.

7.35. Считая, что в сверхпроводнике электроны движутся без сопротивления, вычислить глубину λ , на которую проникает в сверхпроводник низкочастотное электромагнитное поле (лондоновская длина). Оценить ее величину для характерных параметров металлов.

7.36. При не слишком высоких давлениях гелий остается жидким вплоть до температуры $T = 0$. Определить температурную зависимость теплоемкости жидкого гелия-3 (изотоп He³) при низких температурах и оценить численное значение коэффициента в этой зависимости, полностью пренебрегая межатомным взаимодействием. Объем моля жидкого гелия при нормальном давлении $V = 37$ см³/моль.

VIII. ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

8.1. В 1976 г. Нобелевская премия по физике была присуждена за открытие новой элементарной частицы —

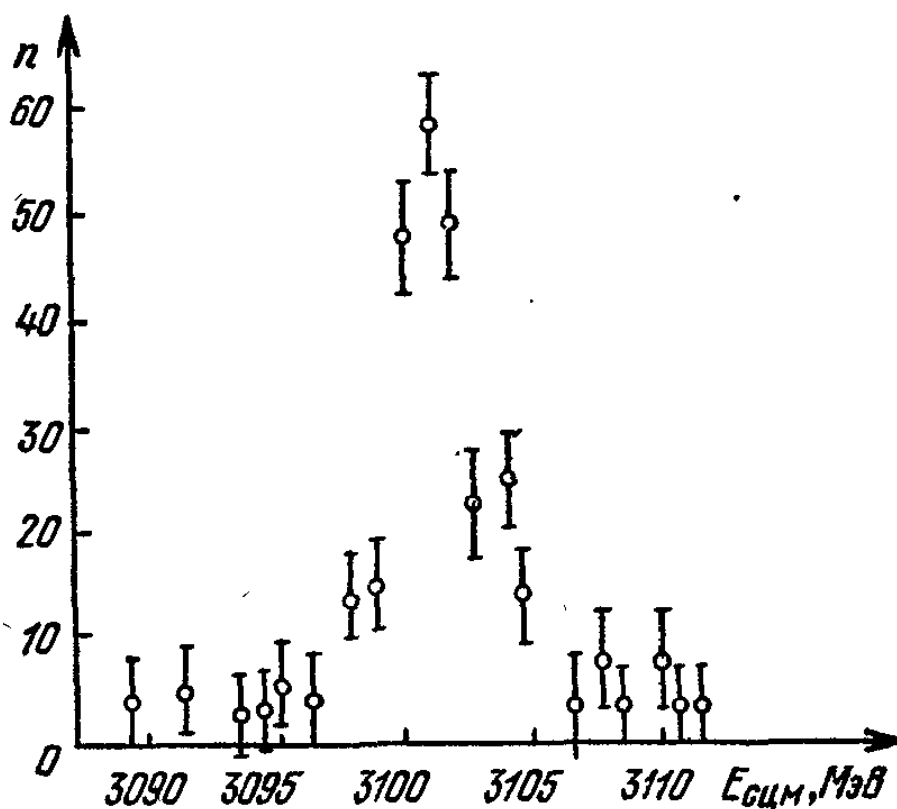


Рис. 53.

джи-мезона. Открытие было сделано практически одновременно и независимо в двух разных экспериментах. В одном из них опыт был поставлен на встречных пучках

электронов и позитронов, ускоренных до одинаковой энергии $E_{\text{сцм}}$. Данные этого опыта показаны на рис. 53. Определить массу и оценить нижнюю границу времени жизни джи-частицы на основе данных опыта.

В другом эксперименте были зарегистрированы продукты распада джи-мезона. Найти массу джи-мезона, распадающегося на электрон и позитрон, если известно, что их энергия одинакова: $E_1 = E_2 = 3,1$ ГэВ, а угол разлета между ними $\varphi = 60^\circ$.

8.2. В кварковой модели адронов предполагается, что мезоны состоят из кварка и антикварка, а барионы — из трех кварков. В простейшем варианте модели имеются четыре кварка и столько же антикварков. Квантовые числа кварков приведены в таблице:

Тип кварка	Спин \hbar	Электрический заряд Q	Барионный заряд B	Странность S	Очарование C
q_p	$1/2$	$+2/3$	$1/3$	0	0
q_n	»	$-1/3$	»	0	0
q_Λ	»	$-1/3$	»	-1	0
q_c	»	$+2/3$	»	0	+1

Построить из кварков протон, Ω -гиперон, положительно заряженный пион, каон и джи-частицу. Найти также взаимную ориентацию спинов кварков, образующих указанные частицы.

8.3. В 1976 г. был открыт новый барион, который был интерпретирован как первый из группы очарованных антилямбда-частиц. Барион распался по схеме $\Lambda_c \rightarrow \tilde{\Lambda}^0 + \pi^+ + \pi^- + \pi^-$. Масса бариона $Mc^2 = 2,25$ ГэВ. Найдите, какая часть массы покоя бариона переходит в кинетическую энергию T продуктов распада.

8.4. При аннигиляции остановившегося антипротона в жидком водороде образовано три пиона: $\bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$. Определить энергию каждого из них, если один из пионов имел максимально возможную энергию.

8.5. В экспериментах со встречными пучками электронов используются два одинаковых накопительных кольца, в которых пучки ультрарелятивистских частиц движутся в противоположных направлениях, сталкиваясь

друг с другом на длине взаимодействия $l = 0,5$ м (рис. 54). Система счетчиков, окружающих область взаимодействия, установлена так, что она регистрирует одно из 10 событий взаимодействия частиц (эффективность регистрации $\epsilon = 0,1$). Найти циркулирующий ток \mathcal{I} , который нужно накопить в каждом кольце, чтобы наблюдать не менее $K = 10$ отсчетов в секунду системой счетчиков. Сечение циркулирующих пучков в кольцах $S = 5$ мм², эффективное сечение взаимодействия двух соударяющихся частиц $\sigma = 10^{-5}$ барн. Считать, что плотность числа частиц вдоль орбиты постоянна.

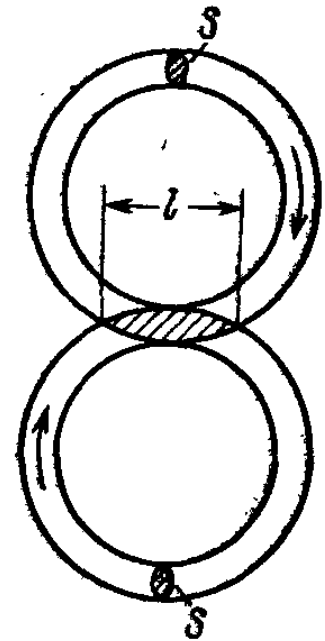


Рис. 54.

8.6. Определить кинетическую энергию пучка протонов, если при движении в азоте он начинает давать свечение Вавилова — Черенкова при давлении $p = 50$ атм и выше. Показатель преломления азота при нормальном давлении $n_0 = 1,0003$.

8.7. Черенковский счетчик установлен в пучке каонов и пионов с импульсом $pc = 500$ МэВ. Чему должен быть равен показатель преломления вещества счетчика n , чтобы счетчик регистрировал только каоны.

8.8. Пучок пионов, энергия которых $E_\pi = 10$ ГэВ, вследствие распада $\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu$ постепенно превращается в поток мюонов и нейтрино. Оценить, на каком расстоянии от области формирования пучка число мюонов в пучке в два раза превышает число пионов. Уходом мюонов из пучка вследствие отклонения от траектории пионов и распадом мюонов пренебречь.

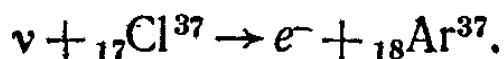
8.9. При какой энергии налетающего протона на покоящийся протон в реакции $p + p \rightarrow d + \pi^+$ кинетическая энергия дейтрона в лабораторной системе координат может быть равна нулю? Масса дейтрона $m_d c^2 = 2m_p c^2 = 2 \cdot 0,94$ ГэВ, масса пиона $m_\pi c^2 = 0,14$ ГэВ.

8.10. Для получения пучков мезонов на ускорителях на пути пучка ускоренных частиц ставится тонкая мишень. В мишени генерируются мезоны. Определить, сколько мезонов образуется в секунду, если на расстоянии $L = 5$ м от мишени детектор регистрирует $n = 5 \cdot 10^2$ мезонов/с. Площадь детектора $S = 100$ см².

Расчет провести для пионов с энергией $T = 500$ МэВ, считая, что пионы вылетают из мишени изотропно (равновероятно под любыми углами).

8.11. Оценить, какая доля протонов космического излучения дойдет до поверхности Земли, не испытав ядерного взаимодействия. Сечение ядерного взаимодействия протонов считать равным геометрическому сечению ядер атомов азота.

8.12. Ядерные реакции, происходящие на Солнце, можно изучать, измеряя поток нейтрино от Солнца с помощью хлор-аргоновой реакции



Среднее (по спектру солнечных нейтрино) сечение реакции $\sigma = 1,4 \cdot 10^{-42}$ см². Считая, что Солнце испускает $N = 3 \cdot 10^{33}$ нейтрино в секунду, определить, сколько должно быть четыреххлористого углерода CCl_4 (естественной смеси изотопов), чтобы в нем за год образовалось $n = 100$ атомов ${}_{18}\text{Ar}^{37}$. В естественной смеси изотопов хлора содержится $\eta = 25\%$ (по массе) ядер ${}_{17}\text{Cl}^{37}$. Радиус земной орбиты $R = 1,5 \cdot 10^8$ км.

8.13. Определить наибольшее число пионов, которые могут генерироваться в реакции $p + p$ при импульсе налетающего протона $pc = 5$ ГэВ. Протоны мишени до реакции покоились.

8.14. Найти время жизни мюона в лабораторной системе координат, если мюон образовался при распаде остановившегося каона.

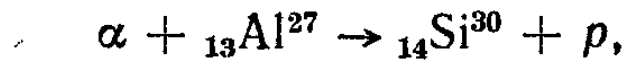
8.15. При радиоактивном распаде ядра Co^{60} испускается электрон, спин которого направлен параллельно импульсу. Оценить, на какой угол φ повернется диск, подвешенный на нити, если препарат Co^{60} нанесен на одной из поверхностей диска. Толщина диска достаточна для поглощения всех электронов, вылетающих в сторону диска. Активность препарата N равна 10 кюри, модуль кручения нити $f \approx 10^{-6}$ дин·см.

8.16. Образец тефлона (полимера с химической формулой $(\text{CF}_2)_n$, где n — целое число) массой $M = 50$ г намагничивается в магнитном поле $H = 20$ кЭ при температуре $T = 0,05$ К. Намагничивание обусловлено расщеплением основного состояния ядра фтора ${}^9\text{F}^{19}$ (спин ядра $s = 1/2$) в магнитном поле на два подуровня.

При включении поля образец получает момент количества движения $L = 12,1 \cdot 10^{-6}$ эрг·с (аналог эффекта Эйнштейна — де-Гааза в ферромагнетиках). Определить величину магнитного момента ядра фтора μ .

8.17. Оценить период полураспада $T_{1/2}$ четно-четного радиоактивного ядра, испускающего α -частицы с энергией 1 МэВ, если ядро ${}_{90}\text{Th}^{232}$ имеет $T_{1/2} = 1,4 \cdot 10^{10}$ лет и испускает α -частицы с энергией 4 МэВ, а для препарата ${}_{84}\text{Po}^{212}$ $E_{\alpha} = 8,8$ МэВ и $T_{1/2} = 3 \cdot 10^{-7}$ с.

8.18. Определить эффективное сечение реакции



если известно, что при облучении толстой алюминиевой мишени α -частицами с энергией 8 МэВ образуется $n_p = 8$ протонов на $n_{\alpha} = 10^6$ α -частиц. Пробег α -частиц в воздухе при нормальных условиях $R_B = 7,0$ см.

8.19. В урановом реакторе мощностью $N = 1$ МВт образуется в среднем $\langle n_{\bar{\nu}} \rangle \approx 6$ антинейтрино на один акт деления ядра урана (от распада в основном радиоактивных осколков). Средняя энергия антинейтрино $E_{\bar{\nu}} \approx 1,5$ МэВ. Реактор окружен толстой биологической защитой (бетон). Оценить поток антинейтрино $\Phi_{\bar{\nu}}$ за биологической защитой на расстоянии $L = 5$ м от реактора и долю энергии, уносимую потоком антинейтрино из реактора.

8.20. Какова кинетическая энергия T_n нейтронов, если известно, что в результате облучения жидководородной мишени нейтронами в реакции $n + p \rightarrow d + \pi^0$ могут наблюдаться γ -кванты от распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, разлетающиеся в строго противоположных направлениях в лабораторной системе отсчета?

8.21. В эвакуированном сосуде объемом $V = 1$ л находятся ультрахолодные нейтроны, отражающиеся от стенок практически с коэффициентом отражения, равным единице. В сосуде имеется окошко площади S , заклеенное фольгой, полностью прозрачной для ультрахолодных нейтронов. Какова должна быть площадь окошка, если наблюдаемое время сохранения нейтронов в ловушке в два раза меньше среднего времени жизни свободных нейтронов $\tau \approx 10^3$ с? Считать, что скорость всех ультрахолодных нейтронов одинакова и равна $v = 5$ м/с.

8.22. Исходя из формулы Вайцзекера, оценить коэффициент поверхностного натяжения ядерного вещества.

8.23. Вхождение нейтронов из вакуума в большинство веществ связано с преодолением определенного энергетического барьера. Поэтому в замкнутой полости достаточно медленные нейтроны оказываются запертыми и могут накапливаться. Определить, какая доля из потока тепловых нейтронов, распределение по скоростям которых максвелловское, окажется запертой в медной камере. Предельный угол скольжения при полном внутреннем отражении для нейтронов, движущихся со средней тепловой скоростью, составляет $i = 10$ угл. мин. Соударения нейтронов со стенками камеры могут рассматриваться как упругие.

8.24. Быстрые нейтроны, попав в воду, быстро замедляются до тепловых скоростей и диффундируют в ней, пока не захватятся ядрами водорода (захватом в кислороде можно пренебречь). Зная сечение захвата $\sigma = 0,3$ барна (1 барн $= 10^{-24}$ см²), оценить время жизни нейтрона в воде τ .

8.25. Медленный нейтрон рассеивается на свободном ядре со спином $I = 3/2$ в состоянии с $L = 0$ (орбитальный момент отсутствует). Определить вероятность рассеяния в состояниях с параллельной и антипараллельной взаимной ориентацией спинов ядра и нейтрона.

8.26. Оценить кинетическую энергию T_n нейтрона и T_α ядра Li^6 , образующихся при фоторасщеплении ядра Li^7 под действием γ -квантов с энергией 15 МэВ. Нейтрон вылетает вперед, т. е. по направлению γ -кванта.

8.27. Хорошо коллимированный пучок γ -квантов с энергией 500 МэВ падает на дейтериевую мишень. Вследствие фоторасщепления дейтерия вторичный пучок содержит нуклоны. Оценить угол φ разлета нуклонов. Радиус дейтерия $r_d = 2 \cdot 10^{-13}$ см.

У к а з а н и е. Следует принять во внимание, что энергия связи нуклонов в дейтерии мала по сравнению с энергией γ -квантов.

8.28. В реакторах, работающих на тепловых нейтронах, имеются очень медленные ультрахолодные нейтроны (УХН). Особенностью ультрахолодных нейтронов является то, что при скорости $v < v_{gr}$ (обычно граничная

скорость $v_{гр} \approx 10$ м/с) нейтроны упруго отражаются от стенок при любых углах падения. Для вывода ультрахолодных нейтронов из реактора используют полые трубы — нейтронотводы. На рис. 55 изображен реактор R , нейтронотвод специальной формы и на его конце — детектор нейтронов D . Полагая, что спектр нейтронов по скоростям в реакторе максвелловский (при температуре $T \approx 400$ К), найти, как зависит поток нейтронов, доходящий до детектора, от высоты его поднятия h . Оценить высоту, на которой поток исчезает.

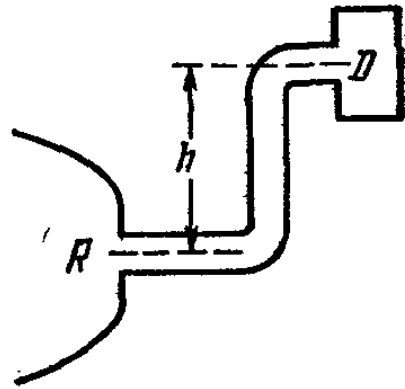


Рис. 55.

I. МЕХАНИКА

1.1. Сила, действующая на пробный груз массы m со стороны Земли:

$$F = \left(\gamma m \frac{4\pi}{3} \rho_3 R_3^3 \right) / R_3^2 = \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_3 R_3 m.$$

Изменение силы за счет свинцового шара радиуса R_c :

$$\Delta F = \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_c R_c m,$$

где $\rho_c = 11\,000$ кг/м³ — плотность свинца. Для измерения с заданной точностью необходимо, чтобы

$$\frac{\Delta F}{F} \geq \frac{\eta}{\delta} = 10^{-6}, \quad \text{или} \quad R_c \geq 10^{-6} \frac{\rho_3}{\rho_c} R_3 \approx 3 \text{ м.}$$

Масса свинцового шара превысит 10^3 т.

1.2. Пусть m_1 и m_2 — массы компонент двойной звезды, l_1 и l_2 — соответственно расстояния от их центров до центра масс и v_1 и v_2 — их скорости. Тогда, предполагая для простоты, что движение происходит по круговым орбитам, для частоты обращения ω получим

$$\omega = \frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2} = \frac{v_1 + v_2}{L}, \quad L = l_1 + l_2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Из рассмотрения сил, действующих на m_1 и m_2 , следует что

$$\frac{m_1 v_1^2}{l_1} = \frac{m_2 v_2^2}{l_2} = \gamma \frac{m_1 m_2}{L^2}, \quad \frac{v_1^2}{l_1} + \frac{v_2^2}{l_2} = \gamma \frac{m_1 + m_2}{L^2}.$$

Далее легко получить, что $\gamma (m_1 + m_2) = 4\pi^2 L^3 T^{-2}$. Аналогично, для системы Солнце — Земля (масса Земли M_3 пренебрежимо мала по сравнению с массой Солнца

M_c) получим $\gamma M_c = 4\pi^2 R_3^3 T_3^{-2}$, где $T_3 = 1$ год, а R_3 по определению равно одной астрономической единице. Таким образом,

$$M = m_1 + m_2 = M_c \left(\frac{T_3}{T}\right)^2 \left(\frac{L}{R_3}\right)^3 = \frac{8}{9} M_c.$$

1.3. Если космонавт и спутник летят по одной и той же орбите, то сила натяжения шнура $F = 0$; эта сила максимальна, когда космонавт, спутник и центр Земли находятся на одной прямой (рис. 56). Период обращения T системы спутник — космонавт около Земли связан с радиусом R орбиты центра масс этой системы соотношением

$$\frac{4\pi^2}{T^2} R = \frac{\gamma M_3}{R^2},$$

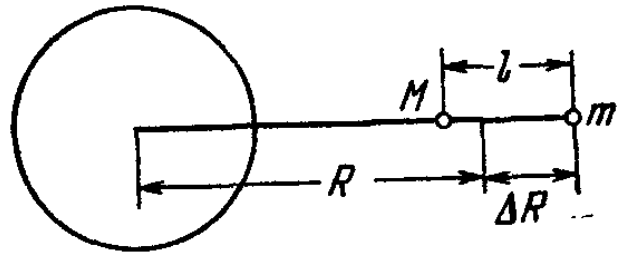


Рис. 56.

где M_3 — масса Земли. Соответственно, для удержания космонавта на орбите радиуса $R + \Delta R$ необходима дополнительная сила F , определяемая из условия:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} (R + \Delta R) = \frac{\gamma M_3}{(R + \Delta R)^2} + \frac{F}{m}.$$

Отсюда с точностью до членов порядка $(\Delta R/R)^2$ имеем

$$F \approx \frac{3\gamma M_3 m}{R^2} \frac{\Delta R}{R} \approx \frac{3mg\Delta R}{R} \approx \frac{3mgL}{R} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$$

(здесь учтено, что массы спутника M и космонавта m много меньше M_3 , и так как $M \gg m$, то $\Delta R \approx L$). Такая же сила натяжения потребуется для удержания космонавта, расположенного между спутником и Землей. В заключение отметим, что гравитационная сила притяжения космонавта к спутнику на шесть порядков меньше F .

1.4. Из третьего закона Кеплера следует, что отношение масс Марса и Земли равно:

$$\frac{M_M}{M_3} = \left(\frac{L_M}{L_3}\right)^3 \left(\frac{T_3}{T_M}\right)^2 \approx 0,11,$$

где T_3 — период обращения спутника Земли, найденный из соотношения $m\omega^2 R_3 \approx mg$ (m — масса спутника), $L_M = \frac{1}{2} (D_M + a + b)$.

$$1.5. \rho(r) = \frac{2\pi}{3} \rho^2 \gamma (R_3^3 - r^3), \quad \rho(0) \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ Па.}$$

$$1.6. R_s - R_n \approx 10 \text{ км.}$$

1.7. Конечную скорость v можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{(v_3 + v_0)^2}{2} - \frac{\gamma M_C}{R} - \frac{\gamma M_3}{R_3} = \frac{v^2}{2},$$

$$v = \left[(v_3 + v_0)^2 - 2\gamma \left(\frac{M_C}{R} + \frac{M_3}{R_3} \right) \right]^{1/2}.$$

Здесь v_3 — скорость движения Земли вокруг Солнца (эффект вращения Земли вокруг своей оси пренебрежимо мал), M_C и M_3 — соответственно массы Солнца и Земли, R_3 — радиус Земли и R — радиус земной орбиты. Траекторию полета аппарата приближенно можно считать гиперболой (пренебрегая притяжением к Земле по сравнению с притяжением к Солнцу).

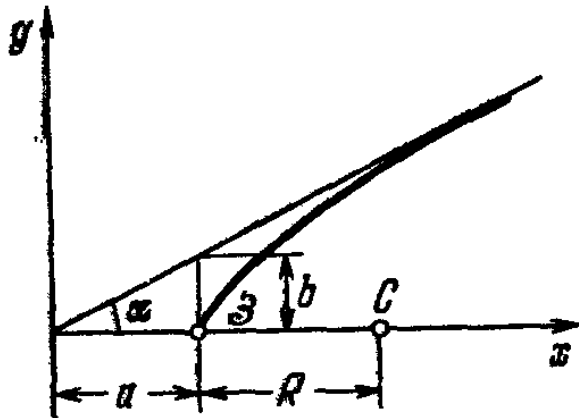


Рис. 57.

На рис. 57 Солнце расположено в точке C, Земля в момент вылета аппарата — в точке Z. Тогда имеем

$$(v_3 + v_0) R = v (a + R) \sin \alpha$$

(из закона сохранения момента импульса) и

$$a + R = (b^2 + a^2)^{1/2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{R}{R+a} = 1 - \cos \alpha$$

(свойство гиперболы). Исключая из этих уравнений $R/(R+a)$, получаем

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{v}{v_3 + v_0}, \quad \text{или}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \left[1 - \frac{2\gamma}{(v_3 + v_0)^2} \left(\frac{M_C}{R} + \frac{M_3}{R_3} \right) \right]^{1/2}.$$

1.8. Потенциальную энергию U аппарата как функцию его расстояния x до центра Луны можно записать в виде

$$U(x) = -\frac{\gamma m M_3}{L-x} - \gamma \frac{M_n m}{x},$$

где $M_3 = 6 \cdot 10^{24}$ кг, $M_L = 7,3 \cdot 10^{22}$ кг и m — соответственно массы Земли, Луны и аппарата, а $L = 3,8 \cdot 10^8$ м — расстояние между центрами Земли и Луны. Функция $U(x)$ имеет максимум ($dU/dx = 0$) при $x = \frac{L}{1 + (M_3/M_L)^{1/2}}$,

равный $U_{\max} = -\gamma m \frac{1}{L(M_L^{1/2} + M_3^{1/2})^2}$. Если кинетическая

энергия T аппарата в этой точке равна нулю, то вблизи поверхности Луны она равна $T = U_{\max} - U(R_L)$, где $R_L = 1,7 \cdot 10^6$ м — радиус Луны. При этом скорость аппарата у поверхности Луны

$$v = v_{\min} = \left[\frac{2}{m} (U_{\max} - U(R_L)) \right]^{1/2} =$$

$$= \left\{ 2\gamma \left[\frac{M_L}{R_L} + \frac{M_3}{L - R_L} - \frac{(M_L^{1/2} + M_3^{1/2})^2}{L} \right] \right\}^{1/2} \approx$$

$$\approx \left(2\gamma \frac{M_L}{R_L} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{M_3}{M_L} \right)^{1/2} \frac{R_L}{L} \right] \approx 7,5 \text{ км/с.}$$

1.9. Будем называть столкновением такой процесс, при котором центры звезд проходят относительно друг друга на расстоянии, не большем суммы их радиусов (в нашем случае — не большем $2R_C$).

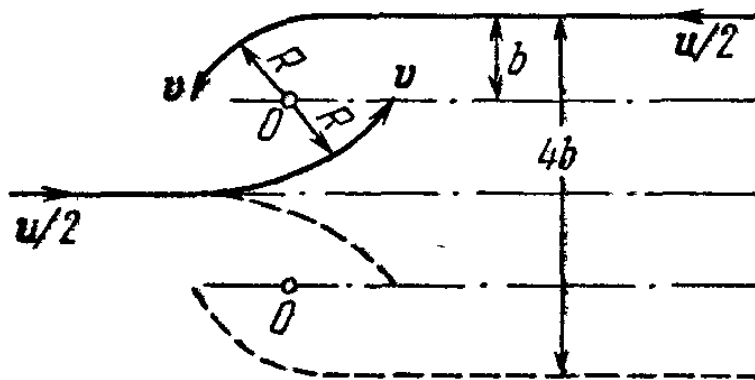


Рис. 58.

Для определения сечения столкновения перейдем в систему центра масс сталкивающихся звезд. Пусть b — максимальный параметр удара (относительно центра масс), при котором происходит столкновение. Тогда, как видно из рис. 58, сечение столкновения $\sigma = \pi (2b)^2$. Из законов сохранения энергии и момента импульса имеем

$$2 \frac{M_C}{2} \left(\frac{u}{2} \right)^2 = 2 \frac{M_C v^2}{2} - \frac{\gamma M_C^2}{2R_C}, \quad M_C b \frac{u}{2} = M_C R_C v,$$

где v — скорость каждой из звезд относительно неподвижного центра O , когда они находятся на кратчайшем расстоянии друг от друга. Исключая отсюда v , получаем

$$\frac{b^2}{R_C^2} = 1 + \frac{2\gamma M_C}{R_C u^2} \approx \frac{2\gamma M_C}{R_C u^2} \approx 10^2.$$

Соответственно, сечение столкновения

$$\sigma = 4\pi b^2 = 8\pi \frac{R_C \gamma M_C}{u^2}.$$

А так как длина свободного пробега $L = 1/(n\sigma)$, где $n = N/(cT)^3$ (c — скорость света, $T = 1$ год $= 3,2 \cdot 10^7$ с), то время между столкновениями одной и той же звезды

$$\tau = \frac{1}{n\sigma u} = \frac{u (cT)^3}{8\pi N R_C \gamma M_C} = 2,2 \cdot 10^{21} \text{ с} = 7 \cdot 10^{13} \text{ лет},$$

т. е. в одном кубическом световом годе происходит одно столкновение за время

$$t = \frac{\tau}{N/2} = 1,4 \cdot 10^{13} \text{ лет}.$$

1.10. При движении в гравитационном поле справедливы следующие соотношения:

$$T^2 b^{-3} = \text{const}, \quad bE = \text{const},$$

где T — период обращения, b — большая полуось орбиты, а E — полная энергия. Отсюда имеем $T^2 E^3 = \text{const}$, или для малых изменений периода и скорости v получим

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{3}{2} \frac{\Delta E}{E} = \frac{3}{2} \frac{mv \Delta v}{E},$$

где m — масса спутника. Поэтому, учитывая, что E — отрицательная величина, для уменьшения периода обращения нужно уменьшить скорость спутника ($\Delta v < 0$). При этом он перейдет на эллиптическую орбиту с меньшим значением b и через n оборотов опередит свое первоначальное положение на круговой орбите на расстояние

$$L = -nv \Delta T = \frac{3}{2} n \frac{mv^2}{E} T \Delta v = -3nT \Delta v.$$

(Здесь мы учли, что для круговых орбит $E = -mv^2/2$.) Увеличив затем его скорость на $-\Delta v$, можно снова

перевести его на исходную круговую орбиту, и относительная скорость спутников станет равной нулю. Определим n и Δv при $L = 45$ км и $T = 1,5$ ч:

$$\Delta v = -\frac{L}{3nT} = -\frac{10}{n} \text{ км/ч.}$$

При $n=1$ $|\Delta v| > 8$ км/ч, при $n=2$ $|\Delta v| = 5$ км/ч. Таким образом, $n_{\min} = 2$. Для стыковки нужно сначала уменьшить скорость отстающего спутника B на 5 км/ч, а через два оборота вновь увеличить ее до прежнего значения.

1.11. Скорость теплового движения молекул атмосферы много меньше скорости спутника $v = 8$ км/с. При таких условиях столкновения молекул с поверхностью спутника в основном являются неупругими. Поэтому можно считать, что при столкновении со спутником молекула получает скорость, равную v . Соответственно, за секунду соударяющиеся со спутником молекулы атмосферы получают импульс $S\rho_a v^2$, т. е. сила трения, действующая на спутник:

$$F = S\rho_a v^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

Как известно, полная энергия спутника на круговой орбите радиуса R равна

$$E = -\frac{mv^2}{2} = -\frac{\gamma mM_3}{2R},$$

где M_3 и m — массы Земли и спутника соответственно. Отсюда при изменении энергии на ΔE радиус орбиты изменяется на $\Delta R = 2R^2 \Delta E / (\gamma mM_3)$, а скорость на $\Delta v = -\Delta E / mv$. За один оборот энергия спутника изменяется за счет сил трения на величину $\Delta E = -2\pi R F$. При этом радиус орбиты уменьшается на

$$\Delta R = -\frac{4\pi R^3}{\gamma mM_3} F \approx -\frac{3F}{\gamma \rho} \approx 0,4 \text{ км.}$$

Здесь $\rho = 5500$ кг/м³ — средняя плотность Земли. Скорость спутника увеличивается на

$$\Delta v = \frac{2\pi R}{mv} F \approx 0,5 \text{ м/с.}$$

1.12. Скорость снаряда v можно определить из закона сохранения момента импульса:

$$I\omega = \frac{mvR_3}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

где $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли. Отсюда

$$c - v = \frac{m^2 v^2 c^2 R_3^2}{(c + v) I^2 \omega^2}.$$

Поскольку v мало отличается от c , можно с хорошим приближением записать

$$c - v \approx \frac{m^2 c^3 R_3^2}{2 I^2 \omega^2} = \frac{9}{2} \left(\frac{mc}{M_3 R_3 \omega} \right)^2 c = 1,56 \cdot 10^{-17} \text{ м/с}.$$

Так как движение снаряда ультрарелятивистское, его кинетическую энергию T (которая совпадает с полной энергией E) можно вычислить по формуле

$$T \approx \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \frac{I\omega c}{R_3}.$$

Отношение этой величины к кинетической энергии вращения Земли $T_3 = I\omega^2/2$:

$$\frac{T}{T_3} = \frac{2c}{\omega R_3} = 1,3 \cdot 10^6.$$

1.13. Изменение импульса электромагнитного поля за секунду равно силе тяги $F = aM$. Соответственно, затрачиваемая на это мощность

$$N = Fc = aMc = 3 \cdot 10^{12} \text{ Вт},$$

(c — скорость света), что в 670 раз больше мощности Братской ГЭС.

1.14. $h = \frac{m^2 \rho}{\rho g M^2}$, где ρ — плотность воды.

1.15. См. решение задачи 1.2. Для нейтронной звезды

$$T = (3\pi/\gamma\rho)^{1/2} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

1.16. На круговой орбите радиуса R полная E , потенциальная U и кинетическая T энергии связаны соотношениями

$$E = \frac{U}{2} = -T = -\frac{\gamma mM}{2R}.$$

После взрыва полная энергия E' оказывается равной

$$E' = T + U(1 - q) = -\frac{\gamma mM}{R} \left(\frac{1}{2} - q \right).$$

При $q > 1/2$ эта энергия больше нуля и спутник покидает звезду по гиперболической орбите. При $q = 1/2$ $E = 0$ и орбита спутника будет параболой. При $q < 1/2$ спутник будет двигаться по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой будет находиться остаток центральной звезды, а большая полуось b может быть определена из известного условия:

$$2E'b = -\gamma m M (1 - q).$$

Принимая во внимание выражение для E' , получим

$$b = R \frac{1 - q}{1 - 2q}.$$

1.17. В процессе торможения скорость корабля изменяется от $v_2 = 2,4$ км/с (вторая космическая скорость для Луны) до $v_1 = v_2/\sqrt{2} = 1,7$ км/с (первая космическая скорость для Луны). Соответственно, масса корабля должна уменьшиться от начальной массы M_0 до M :

$$M = M_0 \exp\left(-\frac{v_2 - v_1}{u}\right) \approx 0,84 M_0$$

(см. решение задачи 1.22). Здесь u — скорость истечения газов. Таким образом, сожженное горючее должно составлять 16% массы корабля. Температуру горения T можно оценить по формуле для скорости истечения газа в пустоту: $u = \sqrt{2c_p T}$, откуда:

$$T = u^2/2c_p \approx 3600 \text{ К.}$$

1.18. Уравнения для вертикальной v_z и горизонтальной v_x компонент скорости ракеты имеют вид

$$M\dot{v}_z = -Mu \sin \varphi - g_{\text{Л}}M, \quad M\dot{v}_x = -Mu \cos \varphi,$$

где M — масса ракеты в момент времени t . По условию $v_z = 0$, поэтому из первого уравнения имеем

$$\dot{M} = -\frac{Mg_{\text{Л}}}{u \sin \varphi} = -\frac{M}{T},$$

где через T обозначена постоянная величина, имеющая размерность времени и равная $T = (u \sin \varphi)/g_{\text{Л}} \approx 235$ с.

Отсюда

$$M = M_0 \exp\left(-\frac{t}{T}\right).$$

Подставляя \dot{M} и M во второе уравнение, имеем

$$\dot{v}_x = g_{\text{Л}} \operatorname{ctg} \varphi \approx g_{\text{Л}}/\varphi, \quad \text{или} \quad v_x = g_{\text{Л}} t \operatorname{ctg} \varphi \approx \frac{g_{\text{Л}}}{\varphi} t.$$

Время τ , необходимое для достижения первой космической скорости $v_1 = \sqrt{R_{\text{Л}} g_{\text{Л}}} = 1,7$ км/с:

$$\tau = \frac{v_1}{g_{\text{Л}} \operatorname{ctg} \varphi} \approx \frac{v_1 \varphi}{g_{\text{Л}}} \approx 100 \text{ с.}$$

Полученное выражение для τ справедливо и при $\varphi \rightarrow 0$. Это вытекает из условия $v_z = 0$. При $\varphi \rightarrow 0$ расход массы бесконечно растет и, следовательно, время разгона до первой космической скорости стремится к нулю.

Относительное изменение массы ракеты за счет сожженного горючего

$$\frac{M(0) - M(\tau)}{M(0)} = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) \approx 0,35.$$

Перегрузка космонавтов

$$g_{\text{эфф}} = \sqrt{g_{\text{Л}}^2 + \dot{v}_x^2} \approx \dot{v}_x \approx \frac{g_{\text{Л}}}{\varphi} = 17 \text{ м/с}^2.$$

1.19. $a - b \approx R_3 \left(\frac{\Delta E}{E}\right) \approx 3$ мм, где R_3 — радиус Земли, E — полная энергия спутника.

1.20. Если телу сообщить скорость v (рис. 59), перпендикулярную радиусу кабины, то на него будет действовать кориолисова сила инерции, равная $F_{\text{кор}} = 2m\omega v$, направление которой ясно из рисунка. При движении тела по окружности

$$\frac{mv^2}{r} = 2m\omega v,$$

откуда максимальная скорость получится при $r = r_{\text{каб}}$:

$$v_{\text{max}} = 2\omega r_{\text{каб}} = 2 \frac{2\pi}{T} r_{\text{каб}} \approx 3,5 \text{ мм/с.}$$

В действительности, так как сила тяжести и центробежная сила инерции не вполне равны между собой,

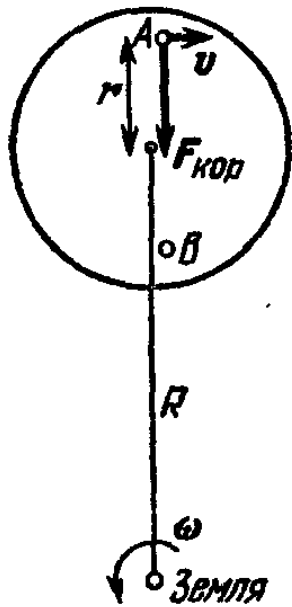


Рис. 59.

а именно:

$$\begin{aligned}
 F_{\tau} - F_{цб} &= \gamma \frac{mM_3}{(R_3 + r)^2} - \omega^2 mR \approx \gamma \frac{mM_3}{R_3^2} \left(1 - \frac{2r}{R_3}\right) - m\omega^2 R_3 \doteq \\
 &= -\gamma \frac{mM_3}{R_3^2} \cdot 2 \frac{r}{R_3} = -2m\omega^2 r = -m\omega v, \\
 F_{кор} &\approx 2 |F_{\tau} - F_{цб}|,
 \end{aligned}$$

то траектория вытянута вдоль оси, направленной к центру Земли.

1.21. Законы сохранения приводят к результату $\operatorname{tg} \varphi = v_t/v_r = 1/2\sqrt{3}$, где v_t и v_r — тангенциальная и радиальная компоненты скорости платформы.

1.22. Уравнение движения ракеты в поле притяжения Луны имеет вид

$$m \left(\frac{dv}{dt} \right) = mg_{\text{л}} + \frac{dm}{dt} u.$$

Интегрирование его по времени t дает ($g_{\text{л}}$ — ускорение свободного падения на Луне)

$$m(\tau) = m_0 \exp\left(-\frac{v_0 + g_{\text{л}}\tau}{u}\right),$$

где $m(\tau)$ — масса ракеты после работы двигателя в течение интервала времени τ . Таким образом, искомый запас топлива

$$m_{\text{топл}} = m_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{v_0 + g_{\text{л}}\tau}{u}\right) \right].$$

1.23. Поскольку период колебаний маятника $T \sim (1/\sqrt{g})$, то $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$, где Δg — величина поля тяготения, создаваемого грунтом, вынутым из тоннеля. Считая тоннель достаточно длинным, нетрудно найти Δg , используя теорему Гаусса. В результате имеем

$$\Delta g = \frac{2\pi\gamma\rho R^2}{h},$$

где γ — гравитационная постоянная. Численная оценка приводит к результату $\Delta T/T \sim 10^{-7}$.

1.24. $\varphi = 4f\Delta/25h \approx 0,03$ рад.

1.25. В $\Delta/\Delta_0 \approx 5$ раз, где Δ — прогиб сетки при падении с высоты h .

1.26. Из закона сохранения энергии и импульса следует

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu_{\perp}^2}{2} + \frac{Mu_{\parallel}^2}{2}, \quad mv_0 = Mu_{\parallel}, \quad mv = Mu_{\perp},$$

где u_{\perp} и u_{\parallel} — поперечная и продольная компоненты скорости. Отсюда

$$M > m, \quad v = v_0 \sqrt{\frac{M-m}{M+m}},$$

$$u = \frac{mv_0}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}.$$

1.27. Согласно закону сохранения импульса в случае γ -распада имеем

$$Mv_2 = \frac{E_{\gamma}}{c}.$$

Здесь $M = 226 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 3,75 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$ — масса ядра Ra^{226} , E_{γ} — энергия γ -кванта, практически совпадающая с полной энергией E_2 , освобождаемой при γ -распаде, и c — скорость света в вакууме. Отсюда для кинетической энергии T_2 ядра отдачи имеем

$$T_2 = \frac{E_2^2}{2Mc^2} = 0,095 \text{ эВ}.$$

В случае α -распада законы сохранения энергии и импульса дают

$$(M - M_{\alpha}) v_1 = M_{\alpha} v_{\alpha}, \quad \frac{M - M_{\alpha}}{2} v_1^2 + \frac{M_{\alpha}}{2} v_{\alpha}^2 = E_1,$$

где v_{α} и v_1 — соответственно скорости α -частицы и ядра отдачи, а M_{α} — масса α -частицы. Отсюда, исключая v_{α} , для кинетической энергии T_1 ядра отдачи получим

$$T_1 = \frac{M_{\alpha}}{M} E_1 = 87 \text{ кэВ}.$$

Окончательно отношение кинетических энергий

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2M_{\alpha}c^2E_1}{E_2^2} = 9 \cdot 10^5.$$

1.28. Максимальная энергия, которая может пойти на ионизацию, соответствует кинетической энергии, потерянной в абсолютно неупругом лобовом соударении.

(Это можно получить, перейдя в систему центра масс.)
Эта потерянная энергия

$$\Delta T_{\max} = \frac{M_{133}}{M_{133} + M_{16}} T_0,$$

где M_{133} и M_{16} — соответственно массы атомов цезия-133 и кислорода-16. $\Delta T_{\max} = 3,56 \text{ эВ} < 3,9 \text{ эВ}$, т. е. ионизация невозможна.

1.29. $T = \frac{M_{14} + M_{\alpha}}{M_{14}} U > 2,97 \text{ МэВ}$, где M_{14} и M_{α} — массы азота и α -частицы.

1.30. $\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{l}{2l_0} \approx -10^{-3}$, т. е. ход часов ускоряется.

1.31. $v \approx 4 \cdot 10^{12} \text{ см/с} \gg c$ (v — на «поверхности» шарика).

1.32. $L = I\omega \approx 10^8 \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}$, $M = I \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \approx 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}^2$, где I — момент инерции колеса.

1.33. Пусть масса человека m , а скорость качелей при прохождении положения равновесия v_0 , которая связана с начальной амплитудой φ_0 соотношением $v_0^2 \approx \approx gl\varphi_0^2$ (в предположении, что углы отклонения качелей от положения равновесия малы). Полная энергия качелей в этот момент $E_0 = mv_0^2/2$. После того как человек поднялся, полная энергия

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh \approx \frac{mg(l-h)\varphi_1^2}{2} + mgh,$$

где φ_1 — новая амплитуда. Изменение полной энергии произошло за счет работы, произведенной человеком против центробежных сил и сил тяжести: $E_1 - E_0 \approx \approx mgh + (mv_0^2/l)h$. Сравнивая это выражение с разностью E_1 и E_0 , найденных ранее, получаем

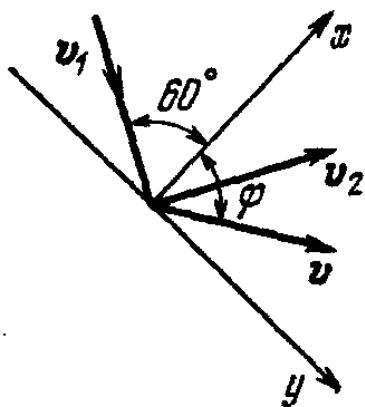
$$\varphi_1^2 \left(1 - \frac{h}{l}\right) = \varphi_0^2 \left(1 + 2 \frac{h}{l}\right), \text{ или } \varphi_1 - \varphi_0 \approx \frac{3}{2} \varphi_0 \frac{h}{l},$$

что представляет собой приращение угловой амплитуды за половину периода. Следовательно, за период искомое приращение

$$\Delta\varphi \approx 3\varphi_0 \frac{h}{l}.$$

1.34. Направим ось координат x нормально к поверхности ракетки, а ось y — параллельно поверхности

(в плоскости падения) (рис. 60). Пусть в системе, связанной с Землей, скорость мяча есть v_1 ($v_{1x} = v_1/2$, $v_{1y} = \sqrt{3}v_1/2$), а скорость ракетки v . Предполагается, что ракетка движется поступательно. Тогда в системе, связанной с ракеткой, скорость v'_1 имеет компоненты



$$v'_{1x} = v_{1x} - v_x, \quad v'_{1y} = v_{1y} - v_y.$$

После столкновения скорость мяча в движущейся системе

$$v'_{2x} = -v'_{1x}, \quad v'_{2y} = v'_{1y}$$

(условие зеркального отражения).

Переходя снова к неподвижной системе, запишем выражения для компонент скорости v_2 мяча после отражения от ракетки

$$v_{2x} = -v_{1x} + 2v_x, \quad v_{2y} = v_{1y}.$$

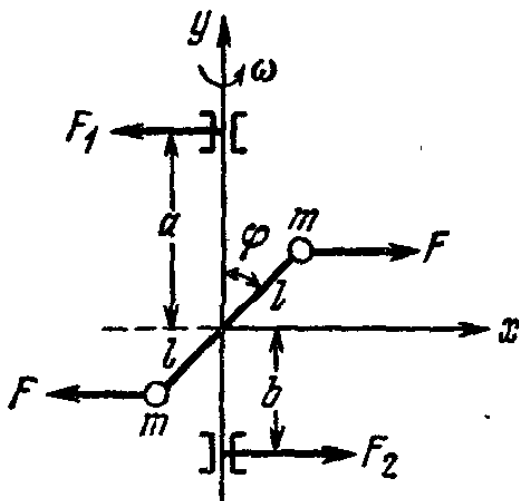
По условию задачи $(v_1 v_2) = 0$, т. е.

$$v_{1x}(-v_{1x} + 2v_x) + v_{1y}^2 = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$v_x = -v_{1x}, \quad v_y \text{ произвольно.}$$

Следует, однако, подчеркнуть, что при ударе ракетки по мячу условие зеркального отражения выполняется достаточно строго только в случае нормального падения (в системе, связанной с ракеткой). Этот случай реализуется при $v_y = v_{1y}$. Поэтому окончательный ответ следует записать в виде



$$v = v_1, \quad \varphi = 60^\circ.$$

Рис. 61.

1.35. Рассмотрим систему координат, жестко связанную с вращающейся штангой. В этой системе условия равновесия запишутся в виде (рис. 61)

$$F_1 - F_2 = 0, \quad F_1 a + F_2 b = 2Fl \cos \varphi.$$

Здесь $F = ml \sin \varphi \cdot \omega^2$ — центробежная сила инерции, F_1 и F_2 — силы реакции подшипников. Из этих уравнений найдем

$$F_1 = F_2 = \frac{ml^2 \omega^2 \sin 2\varphi}{a+b}.$$

1.36. Момент упругих сил $M_{\text{упр}} = -f\varphi$, где φ — угол поворота диска. Момент сил внутреннего трения в газе

$$M_{\text{тр}} = - \int_0^R \eta \frac{v(r)}{h} r \cdot 2\pi r dr,$$

где $v(r) = \dot{\varphi}r$ — скорость точек диска на расстоянии r от центра. Элементарное интегрирование дает

$$M_{\text{тр}} = -2k\dot{\varphi}, \quad \text{где } k = \frac{\pi\eta R^4}{4h}.$$

Как видно, при возрастании h момент $M_{\text{тр}}$ быстро убывает. Это позволяет в первом приближении не учитывать трение на верхней поверхности диска.

Уравнение движения имеет вид

$$I\ddot{\varphi} + 2k\dot{\varphi} + f\varphi = 0.$$

Здесь $I = mR^2/2$ — момент инерции диска. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t} e^{\pm i\omega t}.$$

Тогда получим

$$\delta = \frac{k}{I}, \quad \omega \equiv \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{f}{I} - \delta^2} \approx \sqrt{\frac{f}{I}},$$

где T — период колебаний. Логарифмический декремент затухания:

$$d = \delta T \approx \frac{2\pi k}{\sqrt{If}} = \frac{\pi^2 \eta R^3}{h \sqrt{2fm}},$$

следовательно,

$$\eta = \frac{dh \sqrt{2fm}}{\pi^2 R^3}.$$

1.37. $\omega_{0 \min} = \frac{v_0}{R}, \quad v = \frac{\omega_0 R - v_0}{2}.$

1.38. $T_{\text{пост}} = \frac{\rho^2}{2m}, \quad T_{\text{вращ}} = \frac{5\rho^2 k^2}{4m}, \quad k = \frac{2}{5}.$

1.39. $x \approx h/f$, где h — высота, на которую был поднят центр тяжести табуретки; f — коэффициент трения.

$$1.40. \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2v^2}{gR}.$$

1.41. Момент силы $M = Fl = \Omega L$, где $\Omega = \frac{2\pi}{T} \varphi$ и момент импульса $L = I \cdot 2\pi\nu$. Отсюда

$$F = \frac{4\pi^2 \varphi \nu l}{Tl} \approx 1,3 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

$$1.42. k = \frac{mlrf}{l}.$$

1.43. Скорость центра инерции перед первым ударом $v_0 = \sqrt{2gh}$, скорость центра инерции сразу после удара найдем из закона сохранения энергии и момента импульса относительно точки A' (см. рис. 3):

$$v_0^2 = v^2 + \frac{I}{m} \omega^2, \quad \text{где } I = \frac{ml^2}{3},$$

$$m v_0 \cos \varphi = m v \cos \varphi + \frac{ml^2}{3} \omega.$$

Отсюда получим

$$v = v_0 \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{3 \cos^2 \varphi + 1}, \quad \omega = \frac{2v_0}{l} \frac{3 \cos \varphi}{3 \cos^2 \varphi + 1}.$$

1.44. Угол φ поворота маятника удовлетворяет уравнению $I\ddot{\varphi} + f\varphi = 0$, где $f = \frac{\pi GD^4}{32l}$ — модуль кручения нити. Согласно закону сохранения момента импульса начальные условия имеют вид

$$\varphi(0) = 0, \quad I\dot{\varphi}(0) = 2 \frac{E}{c} r,$$

где E — энергия, излученная квантовым генератором. Решение уравнения движения можно представить в виде

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t, \quad \text{где } \varphi_0 = \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega} \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{f}{I}}.$$

Для чувствительности $\eta = 2\varphi_0/E$ получаем

$$\eta = \frac{4r}{\omega c l}.$$

Отсюда найдем период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi c \eta l}{2r} = 19 \text{ с.}$$

Далее, поскольку $T = 2\pi \sqrt{l/g}$, имеем

$$D = 4 \left(\frac{\pi l}{2GT^2} \right)^{1/4} = 22 \text{ мкм.}$$

1.45. Скорость упругих волн $s = \sqrt{E/\rho} = 5 \text{ км/с}$. Для оценки за время соударения τ примем время прохождения волны от одного торца стержня до другого и обратно, т. е. $\tau \approx 2l/s = 4 \cdot 10^{-5} \text{ с}$. Неупругие явления возникнут тогда, когда в каких-либо точках стержня давление достигнет p , т. е. потенциальная энергия, отнесенная к единице объема, достигнет величины $p^2/2E$. Такими точками являются точки на поверхности соприкосновения стержней. В этих точках в момент удара в потенциальную энергию полностью переходит вся кинетическая энергия (отнесенная к тому же объему). Таким образом,

$$\rho \frac{v^2}{2} \approx \frac{p^2}{2E},$$

и, следовательно,

$$v \approx \frac{p}{\sqrt{\rho E}} = \frac{ps}{E} = 5 \text{ м/с.}$$

1.46. Для простоты оценок пренебрежем жесткостью покрышки и камеры и будем считать, что деформацию мяча можно характеризовать только одним параметром x (рис. 62), много меньшим радиуса мяча R (слабый удар). Тогда с хорошим приближением можно считать, что избыточное давление p в мяче в течение удара сохраняется постоянным. При этом сила, действующая на мяч со стороны стенки, $F = pS$ (S — площадь поверхности соприкосновения мяча и стенки) может быть представлена в виде

$$F = \pi p r^2 \approx 2\pi p R x.$$

Поскольку сила F оказалась пропорциональной деформации мяча x , уравнение движения мяча у стенки имеет вид уравнения колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{2\pi p R}{m},$$

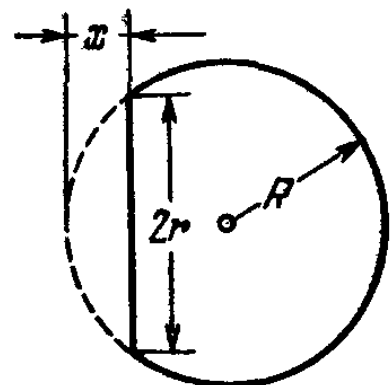


Рис. 62.

где m — масса мяча. Время столкновения τ равно половине периода колебаний, т. е. $\tau \approx (2\pi m/\rho R)^{1/2}$. Беря для оценок $m = 0,5$ кг, $\rho = 10^5$ Па, $R = 0,1$ м, получим $\tau \approx 2 \cdot 10^{-2}$ с.

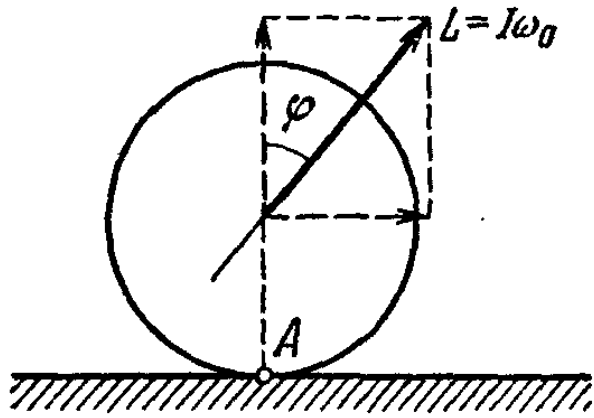


Рис. 63.

1.47. Относительно точки A (рис. 63) моменты внешних сил (силы тяжести и силы трения) равны нулю. Следовательно,

$$I\omega_0 \cos \varphi = \text{const},$$

$$I\omega_0 \sin \varphi = I\omega_{\text{гор}} + mvR = (I + mR^2) \omega_{\text{гор}},$$

где $v = \omega_{\text{гор}} R$ — скорость шара при установившемся чистом качении. Отсюда

$$\omega_{\text{верт}} = \omega_0 \cos \varphi, \quad \omega_{\text{гор}} = \frac{I\omega_0 \sin \varphi}{I + mR^2} = \frac{2}{7} \omega_0 \sin \varphi,$$

$$v = \frac{2}{7} \omega_0 R \sin \varphi,$$

$$\omega = (\omega_{\text{гор}}^2 + \omega_{\text{верт}}^2)^{1/2}.$$

1.48. В задаче следует различать два случая.

1) В течение времени удара τ продолжается скольжение. Тогда

$$mv_{\text{верт}} = f \int_0^{\tau} N(t) dt,$$

где N — реакция стены. С другой стороны, изменение горизонтальной составляющей импульса равно

$$2mv_0 = \int_0^{\tau} N(t) dt.$$

Следовательно,

$$v_{\text{верт}} = 2fv_0, \quad \text{tg } \alpha = 2f.$$

Нетрудно показать, что условие скольжения в конце удара, т. е. $\omega(r) > v_{\text{верт}}/r$, приводит к условию $f < 1/7$.

2) Чистое качение наступает до окончания удара, т. е. при $\tau_1 < \tau$, что имеет место при $f > 1/7$. Тогда

$$\omega(\tau_1) = \frac{v_{\text{верт}}}{r}, \quad mv_{\text{верт}} = \int_0^{\tau_1} N(t) dt.$$

Изменение момента импульса шара за это время равно

$$I\omega(\tau_1) - I\omega_0 = -rf \int_0^{\tau_1} N dt, \quad \text{или} \quad \frac{v_{\text{верт}}}{-r} - \frac{v_0}{r} = -\frac{rfm v_{\text{верт}}}{I},$$

откуда следует, что

$$v_{\text{верт}} = \frac{2}{7} v_0, \quad \text{т. е.} \quad \text{tg } \alpha = \frac{2}{7}.$$

Итак,

$$\text{tg } \alpha = 2f \quad \text{при} \quad f < \frac{1}{7},$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{2}{7} \quad \text{при} \quad f > \frac{1}{7}.$$

$$1.49. \quad t = \frac{S}{\sigma} \left(\frac{2h}{g} \right)^{1/2}.$$

$$1.50. \quad t = \frac{S}{\sigma} \frac{h - h_0}{(2gh_0)^{1/2}}.$$

1.51. Относительное изменение объема

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3(1-2\mu)}{E} p,$$

где p — давление, $\Delta V = m \frac{\rho_{\text{в}} - \rho}{\rho_{\text{в}} \rho}$ ($\rho_{\text{в}}$ — плотность воды и m — масса). Следовательно,

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\rho_{\text{в}} - \rho}{\rho_{\text{в}}}, \quad p = \frac{E(\rho_{\text{в}} - \rho)}{\rho_{\text{в}} \cdot 3(1-2\mu)} \approx 2 \cdot 10^9 \text{ Па.}$$

1.52. Для гравитационных волн скорость c и длина l связаны соотношением $c = \sqrt{gl}$. Поэтому волновые картины будут подобны, если все размеры изменить пропорционально квадрату скорости движения. Следовательно, скорость модели должна быть равной $3,6 \text{ км/ч} = 1 \text{ м/с}$. Отметим, что в данной задаче безразмерными параметрами подобия являются отношения $c/v = \sqrt{gl}/v$ и l/L , где v — скорость корабля, L — его линейный размер.

1.53. Фазовая скорость поверхностных волн может зависеть от плотности жидкости ρ , ускорения свободного падения g и длины волны λ : $v \sim \rho^n g^m \lambda^p$. Сравнивая размерности левой и правой частей этого уравнения, получим $n = 0$, $m = 1/2$, $p = 1/2$. Таким образом, $v = A \sqrt{g\lambda}$, где A — некоторый числовой безразмерный множитель.

2.1. Используя первое начало, уравнение Менделеева — Клапейрона и уравнение процесса (см. рис. 5), получаем

$$C(V) = R \frac{\gamma - (\gamma + 1) V/V_0}{(\gamma - 1) [1 - 2V/V_0]}, \quad T_{\max} = p_0 V_0 / 4R.$$

В точке $C(V) = 0$ прямая на рис. 5 касается адиабаты, а в точке $C(V) = \infty$ — изотермы.

2.2. Согласно условию задачи $dQ = -dU$, где U — внутренняя энергия. Поэтому теплоемкость $C = dQ/dT = -C_V$. Используя это соотношение, первое начало и уравнение Менделеева — Клапейрона, находим уравнение процесса:

$$TV^{(\gamma-1)/2} = \text{const}$$

и выражение для работы внешних сил, затрачиваемой на сжатие газа от объема V_0 до V :

$$-A = 2C_V T_0 \left[\left(\frac{V_0}{V} \right)^{(\gamma-1)/2} - 1 \right].$$

При $V = V_0/2$ работа

$$-A = 2C_V T_0 (2^{(\gamma-1)/2} - 1).$$

2.3. При произвольном уравнении состояния $p = p(V, T)$

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT.$$

В изобарическом процессе $dp = 0$, отношение дифференциалов dV/dT равно частной производной $(\partial V/\partial T)_p$ и поэтому

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V = -1.$$

Вводя обычным образом

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad \gamma = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V, \quad \kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T,$$

получаем $\beta = \gamma\kappa$.

2.4. Обычная формула для скорости адиабатической струи при истечении в вакуум $v_0 = \sqrt{2C_p T/\mu}$, где μ — молярная масса, C_p — молярная теплоемкость. Используя

уравнение состояния $p = \rho RT/\mu$ и формулу для скорости звука $s^2 = \gamma p/\rho$, получаем $v = s \sqrt{2/(\gamma - 1)}$.

2.5. Согласно формуле Циолковского $M_0/M = e^{v_1/v_0}$, где $v_0 = \sqrt{2C_p T/\mu}$ — скорость истечения газов в системе ракеты (ср. предыдущую задачу). Поэтому

$$\frac{M_0}{M} = \exp \left\{ v_1 \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\mu}{RT}} \right\} \approx 11,3.$$

2.6. Непосредственное вычисление показывает, что к. п. д. цикла, состоящего из двух адиабат и двух изохор, равен $\eta = 1 - \alpha^{1-\gamma}$, где α — коэффициент сжатия. В результате при $\gamma = 4/3$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{1 - \alpha_2^{1-\gamma}}{1 - \alpha_1^{1-\gamma}} \approx 1,29.$$

2.7. Принимая ориентировочно для разности температур между тропической и полярной областями $\Delta T \approx 50$ К, получаем по теореме Карно $\eta_{\max} = \Delta T/T_1 \approx 0,16$. Мощность N , преобразуемая каждую секунду в энергию ветров, равна

$$N = \frac{\eta Q}{4\pi R_3^2} = 0,1 \frac{\eta_{\max} Q}{4\pi R_3^2} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ Вт/км}^2;$$

здесь R_3 — радиус Земли. В качестве причин различия η и η_{\max} можно рассмотреть поглощение солнечной энергии в областях высоких широт, избыточное тепловое излучение (т. е. превышающее среднее) из области низких широт, теплопроводность, неполное поглощение солнечного излучения в атмосфере и др.

2.8. Допустим противное. Изобразим участки политроп A и B между двумя соседними состояниями (1 и 2), в которых политропы встречаются, и составим из них замкнутый цикл, как показано на рис. 64, а. Тогда, вычисляя интегралы по этому циклу с учетом того, что на политропах $dQ = C dT$, получаем

$$\oint dS = (C_A - C_B) \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad A = \oint dQ = (C_A - C_B) (T_2 - T_1).$$

Здесь C_A и C_B — теплоемкости на политропах A и B . Первый из интегралов аннулируется, так как энтропия является функцией состояния и поэтому интеграл от нее по замкнутому контуру равен нулю. Непосредственно

видно, что при этом автоматически аннулируется и второй интеграл вне зависимости от того, за счет какого фактора обращается в нуль первый интеграл ($C_A = C_B$ или $T_1 = T_2$). Но так как работа A равна площади на $p - V$ -плоскости, ограниченной циклом, то это означает полное совпадение кривых A и B . Если функция $T(p, V)$ неоднозначна, то это доказательство теряет силу, так как возможна ситуация, представленная на рис. 64, б.

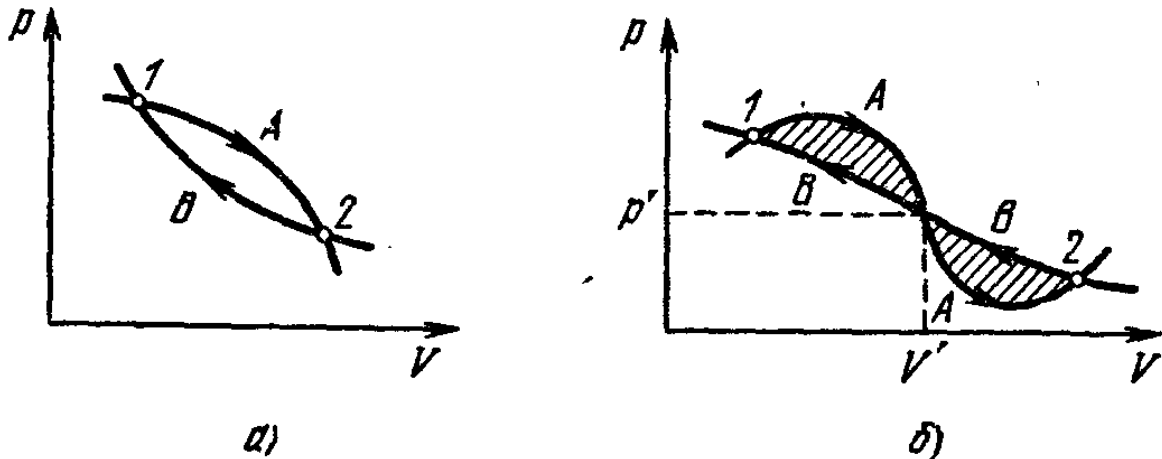


Рис. 64.

Здесь в точке (p', V') обеим политропам отвечают различные температуры, а $\oint p dV$ аннулируется за счет сокращения интегралов по двум заштрихованным областям. Что касается интегралов по контурам, охватывающим одну из заштрихованных областей, то и $\oint dS$, и $\oint dA$ отличны от нуля, так как эти контуры не отвечают замкнутым циклам.

2.9. Легко видеть, что первое начало термодинамики можно представить в виде

$$dQ = (C_p - C_v) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV + C_v dT.$$

Действительно, при $V = \text{const}$ правая часть превращается в $C_v dT$, а при $p = \text{const}$, когда $dV = (\partial V / \partial T)_p dT$, в $C_p dT$. Отсюда следует, что для адиабатического процесса

$$\left(\frac{dT}{dV} \right)_{\text{ад}} = \left(\frac{C_p}{C_v} - 1 \right) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p,$$

поэтому

$$\frac{C_p}{C_v} \approx 1 + \beta \frac{\Delta T}{\Delta V / V} = 1,1.$$

Переходя в первой формуле от переменных V, T к переменным p, T , с учетом тождества

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -1$$

получаем

$$dQ = C_p dT - (C_p - C_v) \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp.$$

Отсюда приращение давления

$$\Delta p \approx \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \frac{C_p/C_v}{C_p/C_v - 1} \Delta T \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2.$$

2.10. Записывая

$$T dS = dW - V dp = \left[\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_T - V\right] dp - \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_p dT,$$

где W — энтальпия, и воспользовавшись тем, что dS является полным дифференциалом, получаем термодинамическое тождество

$$\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_T - V = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Воспользовавшись им, для адиабатического процесса ($dS = 0$) получаем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = -\frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Для растяжения проволоки совершенно аналогично:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial F}\right)_S = -\frac{\alpha l T}{C};$$

здесь $C = c_p l \sigma$ (σ — площадь поперечного сечения проволоки, l — длина). Окончательно

$$\Delta T = -\frac{\alpha T F}{c_p \sigma} \approx -0,03 \text{ К.}$$

2.11. Так как цилиндр теплоизолирован, то $Q = 0$, а поскольку не совершается работы против внешних сил, то и $A = 0$. Следовательно, $\Delta U = 0$, и поэтому $T = \text{const}$. Изменение энтропии $\Delta S = \nu R \ln(V_1 V_2 / V_0^2)$, где V_1 и V_2 — объемы частей, на которые цилиндр разделен в конечном состоянии, а $V_0 = (V_1 + V_2)/2$. Легко убедиться, что при $\pi r^2 p \gg mg$ эти объемы равны: $V_{1,2} = V_0 \left(1 \pm \frac{mg}{2\pi r^2 p}\right)$ и

$$\Delta S \approx -\frac{\nu R}{4} \left(\frac{mg}{\pi r^2 p}\right)^2.$$

2.12. Для обратимого изотермического процесса ($T = \text{const}$) из второго начала термодинамики следует $dA = -dF$, где $F = U - TS$ — свободная энергия. Поэтому $A_{\text{max}} = -\Delta F$. Так как для идеального газа в изотермическом процессе $U = \text{const}$, то $A_{\text{max}} = T \Delta S$. Отсюда непосредственно следует

$$A_{\text{max}}^{T=\text{const}} = RT \left(\nu_1 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + \nu_2 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} \right) \approx 1,8 \text{ кДж.}$$

Для обратимого адиабатического процесса ($dQ = 0$) из первого начала следует, что $A_{\text{max}} = -\Delta U$. Этот процесс является изоэнтропийным, и условие $S = \text{const}$ приводит к следующему уравнению для определения конечной температуры T' :

$$(\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2}) \ln \frac{T'}{T} + \frac{A_{\text{max}}^{T=\text{const}}}{T} = 0.$$

Отсюда $T' \approx 225 \text{ К}$. Адиабатическая работа

$$\begin{aligned} A_{\text{max}}^{S=\text{const}} &= U(T) - U(T') = (\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2}) (T - T') = \\ &= \frac{T - T'}{T \ln(T/T')} A_{\text{max}}^{T=\text{const}} \approx \frac{T + T'}{2T} A_{\text{max}}^{T=\text{const}} \approx 1,6 \text{ кДж.} \end{aligned}$$

2.13. Каждый из поршней совершает работу по изотермическому сжатию того газа, для которого он непрозрачен, от объема V_0 до объема $V' = V_0/2$; второй газ свободно проходит сквозь поршень. Полная работа внешних сил в этом процессе

$$A = 2\nu RT \ln \left(\frac{V_0}{V'} \right) = 2 \ln 2 \cdot \nu RT.$$

Непосредственное вычисление изменения полной энтропии (как суммы изменения энтропий обоих газов) показывает, что $\Delta S = -A/T$ в соответствии с общей теорией (см. предыдущую задачу).

2.14. Заключим мешок объемом V_1 , содержащий ν_1 молей гелия, внутрь большого объема V_2 , содержащего ν_2 молей гелия и ν молей воздуха при той же температуре T и полном давлении p (для простоты не учитываем, что воздух сам является смесью газов — результат от этого не зависит). Тогда энтропия в исходном состоянии, когда гелий находится в мешке, равна

$$S_1 = R\nu_1 \ln \frac{V_1}{\nu_1} + R\nu_2 \ln \frac{V_2}{\nu_2} + R\nu \ln \frac{V_2}{\nu},$$

а в конечном состоянии, когда весь гелий продиффундировал наружу, равна

$$S_2 = R(v_1 + v_2) \ln \frac{V_1 + V_2}{v_1 + v_2} + Rv \ln \frac{V_1 + V_2}{v}.$$

Изменение энтропии $\Delta S = S_2 - S_1$ нужно вычислить в пределе, когда $v, v_2, V_2 \rightarrow \infty$, причем V_2/v и V_2/v_2 сохраняют конечные значения. Простое вычисление дает

$$\Delta S = Rv_1 \ln \frac{V_2/v_2}{V_1/v_1} = \frac{pV_1}{T_1} \ln \frac{n_1}{n_2} \approx 110 \text{ Дж/К},$$

где n_1 и n_2 — молярные концентрации гелия в мешке и в окружающей атмосфере. Минимальная изотермическая работа, необходимая для того, чтобы снова собрать такое количество гелия, равна (ср. задачу 2.12):

$$|A|_{\min} = T \Delta S = pV_1 \ln \frac{n_1}{n_2} \approx 32 \text{ кДж}.$$

2.15. В условиях $dQ=0$ и $p = \text{const}$ сохраняется энтальпия. До релаксации $C_p = 7/2 R$, а после релаксации $C'_p = 9/2 R$. Поэтому $T_2 = 7/9 T_1$. Изменение энтропии ΔS аддитивно складывается из ΔS_{ext} и ΔS_{int} , отвечающих внешним и внутренним степеням свободы соответственно. В изобарическом процессе

$$\Delta S_{\text{ext}} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad \Delta S_{\text{int}} = \int_{T_0}^{T_2} C_0(T) \frac{dT}{T},$$

где $C_0(T)$ — колебательная теплоемкость. Но теплоемкость гармонического осциллятора в квантовой области (т. е. при $kT \ll \hbar\omega$) экспоненциально мала, и поэтому основной вклад в интеграл дает область интегрирования $T \gtrsim \hbar\omega/k$, в которой $C_0 \approx R$. Следовательно, $\Delta S_{\text{int}} \approx R \ln(kT_2/\hbar\omega) \gg \Delta S_{\text{ext}}$, и поэтому с той же точностью $\Delta S \approx R \ln(kT_1/\hbar\omega)$. Физически преобладание колебательного вклада в ΔS связано с тем, что в ходе релаксации наибольшее относительное изменение температуры происходит в колебательной подсистеме.

2.16. Из вывода уравнения Клапейрона — Клаузууса следует, что теплота парообразования $\lambda = T(s_{\text{г}} - s_{\text{ж}})$, где s — удельная энтропия. Отсюда

$$\Delta S = -\frac{\lambda m}{T} = -\frac{\lambda \mu p \Delta V}{RT^2} \approx -0,67 \text{ Дж/К}.$$

Здесь использовано уравнение Менделеева — Клапейрона; m — масса пара, μ — молярная масса. Так как условием равновесия жидкость — пар является неизменность термодинамического потенциала $\Phi = U + pV - TS = F + pV$ при фазовом переходе ($\Phi_{п} = \Phi_{ж}$), то

$$\Delta F = -p \Delta V \approx -10 \text{ Дж.}$$

2.17. Прежде всего надо показать, что адиабаты всегда идут круче, чем изотермы. Вдоль адиабаты $dS = 0$ и

$$C_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV = 0.$$

Согласно известному термодинамическому тождеству выражение в квадратной скобке равно $T (\partial p / \partial T)_V$. Подставляя полный дифференциал функции $T = T(V, p)$,

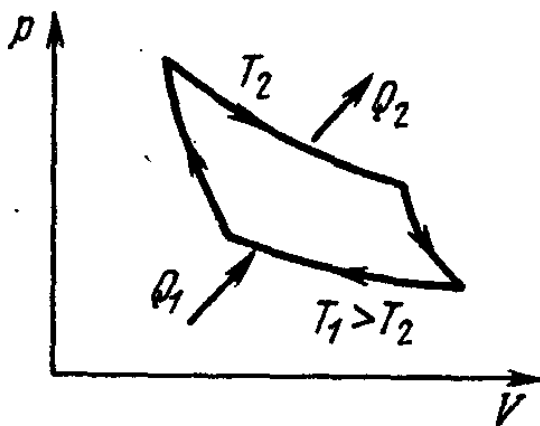


Рис. 65.

учитывая, что выписанное равенство справедливо вдоль адиабаты $S = \text{const}$, и воспользовавшись тождеством из задачи 2.3, получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S &= \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T - \frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)^2 < \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T, \end{aligned}$$

т. е. адиабата спускается круче изотермы при произвольном

знаке $(\partial p / \partial T)_V$. Поэтому в целом цикл имеет обычный вид (рис. 65). Направление обхода (по часовой стрелке) диктуется исключительно знаком работы $A > 0$. Из $(\partial p / \partial T)_V < 0$ следует, что «горячая» изотерма T_1 расположена ниже «холодной» T_2 . Вдоль изотермы $dS = (\partial p / \partial T)_V dV$, и поэтому при движении по нижней изотерме влево ($dV < 0$) элементарная теплота $dQ = T_1 dS > 0$, т. е. система получает теплоту. На верхней («холодной») изотерме система теплоту отдает.

2.18. Используя уравнение газа Ван-дер-Ваальса, находим, что $p = 5p_{кр}$, а изотермическая сжимаемость $\kappa = 1/(6p_{кр})$. Записывая уравнение колебаний поршня массы M , получаем

$$\omega^2 = 6S^2 p_{кр} / MV.$$

Учитывая известное соотношение $V = V_{кр} = 3b$ и условие равновесия поршня $Mg = 5p_{кр}S$, находим окончательно

$$\omega^2 = 2gS/5b.$$

2.19. Адиабатическая (лапласовская) скорость звука определяется формулой $s^2 = (\partial p / \partial \rho)_S$. Дифференцируя выражение для давления газа Ван-дер-Ваальса и подставляя в коэффициенты критические значения параметров ($T_{кр} = 8a/27bR$, молярный объем $V_{кр} = 3b$), убеждаемся, что коэффициент при dV аннулируется и $dp = (R/2b) dT$. Обращение в нуль коэффициента при dV означает, что $(\partial p / \partial \rho)_T = 0$, т. е. в критической точке обращается в нуль изотермическая (ньютоновская) скорость звука. Дифференцируя в критической точке энтропию и полагая затем $dS = 0$ (адиабатический процесс), находим

$$C_V dT + \frac{4a}{27b^2} dV = 0.$$

Поскольку плотность $\rho = \mu/V$, где μ — молярная масса, для адиабатической скорости звука получаем окончательно

$$s = \sqrt{2aR/3b\mu C_V}.$$

2.20. Выделим в жидкости плоский слой шириной $2x$, расположенный симметрично относительно центральной плоскости. Условие его стационарного движения — равенство потока импульса через боковые грани разности сил, действующих на торцы:

$$-2d\ln \frac{dv}{dx} = 2x\ln \rho gh.$$

Интегрируя это уравнение с граничным условием $v(\delta/2) = 0$, получаем

$$v(x) = \frac{\rho gh}{2d\eta} \left[\left(\frac{\delta}{2} \right)^2 - x^2 \right], \quad v_{\max} = \frac{\rho gh \delta^2}{8d\eta} \approx 2,3 \text{ см/с.}$$

Интегрированием по сечению определяем расход жидкости:

$$m = \frac{2}{3} \delta l \rho v_{\max} \approx 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ г/с.}$$

2.21. Мысленно выделим в жидкости цилиндрический слой с произвольными внутренним и наружным радиусами и осью, совпадающей с осью трубы. Так как

движение жидкости в нем стационарно, а давления на обоих торцах равны, то полные потоки импульса через его внутреннюю и наружную поверхности также равны. Поэтому поток импульса $\Pi(r)$ через цилиндрическую поверхность радиуса r , взятый в расчете на единицу длины

$$\Pi = -2\pi r\eta \frac{dv}{dr} = \text{const},$$

не зависит от r . Здесь $v(r)$ — скорость жидкости. Интегрируя это соотношение, находим

$$v + \left(\frac{\Pi}{2\pi\eta}\right) \ln r = \text{const}$$

и, используя граничные условия $v(R_1) = v_0$, $v(R_2) = 0$, получаем окончательно

$$v(r) = v_0 \frac{\ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)}, \quad F = \Pi = \frac{2\pi\eta v_0}{\ln(R_2/R_1)} = 0,27 \text{ дин/см.}$$

2.22. Выделим в жидкости цилиндр радиуса r , ось которого совпадает с осью трубки. Условие стационарного движения жидкости внутри цилиндра — равенство потока импульса через боковую поверхность разности сил, действующих на торцы:

$$-2\pi r\eta \frac{dv}{dr} = \frac{\pi r^2 p}{l},$$

где p — перепад давления между концами трубки, $\eta = \nu\rho$ — динамическая вязкость, а $v(r)$ — скорость потока. Интегрируя это уравнение с граничным условием $v(R) = 0$, получаем

$$v(r) = \frac{\rho}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Интегрируя $\rho v(r)$ по сечению трубки, находим поток массы (формула Пуазейля)

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{\rho}{8\nu h} \pi R^4,$$

где $h(t)$ — высота столба жидкости, а $p = \rho gh$ — перепад давлений. Интегрирование этого уравнения дает

$$m(t) = m_0 - \frac{\rho g}{8\nu} \pi R^4 t,$$

что, совместно с начальным условием $m_0 = \pi R^2 l \rho$, приводит к $\tau = 8\nu l / g R^2$.

2.23. Пусть узкий слой толщиной Δz между двумя плоскостями заполнен жидкостью с коэффициентом динамической вязкости η , а сами плоскости движутся в направлении оси x со скоростями v_x и $v_x + \Delta v_x$ (рис. 66). Тогда силы вязкого трения, действующие на эти плоскости, соответственно будут равны $\eta \Delta v_x / \Delta z$ и $-\eta \Delta v_x / \Delta z$ (в расчете на единицу площади). Полная диссипируемая мощность в слое

$$\begin{aligned} -\eta \frac{\Delta v_x}{\Delta z} v_x + \eta \frac{\Delta v_x}{\Delta z} (v_x + \Delta v_x) &= \\ &= \eta \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta z} \right)^2 \Delta z \approx \eta \left(\frac{dv_x}{dz} \right)^2 \Delta z. \end{aligned}$$

Поскольку разность давлений на концах капилляра $p = \rho gh$, то распределение скоростей в нем (см. предыдущую задачу)

$$v(r) = \frac{\rho gh}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

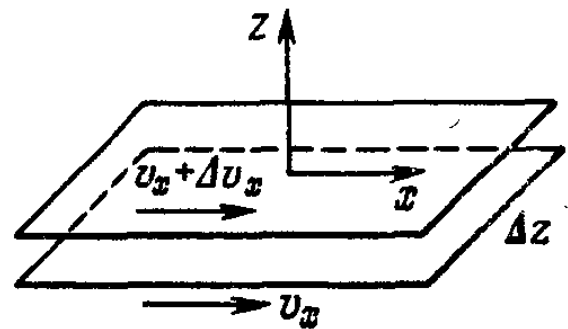


Рис. 66.

Выделяя в жидкости тонкие цилиндрические слои и применяя полученную выше формулу для диссипации, получаем для полной мощности, диссипируемой в капилляре:

$$N = \eta l \int_0^R \left(\frac{dv_x}{dr} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\pi}{8} \frac{(\rho gh R^2)^2}{\eta l} \approx 10^{-3} \text{ Вт.}$$

2.24. При работающем двигателе пространственное распределение газа в кабине неоднородно из-за наличия сил инерции в системе, связанной с ракетой. При выключении двигателя оно постепенно переходит к однородному.

1) При квазистатическом переходе к однородному распределению газ совершает работу против сил инерции. Работа, связанная с перемещением газа при бесконечно малом изменении ускорения Δa :

$$\Delta A = - \sum_i F_i \Delta x_i = \sum_i m_i a \Delta x_i = ma \Delta X = ma \frac{dX}{da} \Delta a,$$

где суммирование по i распространено на все элементарные объемы, m_i — их массы, Δx_i — их перемещения,

$X(a)$ — координата центра тяжести газа. При $\mu ah/RT_0 \ll 1$ легко получить

$$X \approx \frac{h}{2} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{\mu ah}{RT_0} \right].$$

В этом же приближении при вычислении dX/da можно пренебречь изменением температуры, которое вносит поправки высшего порядка малости; поэтому

$$\frac{dX}{da} = - \frac{\mu h^2}{12RT_0}.$$

Полная работа

$$A = m \int_a^0 a \frac{dX}{da} da = \frac{m\mu h^2 a^2}{24RT_0}$$

в условиях теплоизоляции ($Q=0$) определяет изменение внутренней энергии $\nu C_V (T_1 - T_0) + A = 0$, где ν — число молей. Окончательно

$$T_1 - T_0 = - \frac{1}{24} \frac{RT_0}{C_V} \left(\frac{\mu ah}{RT_0} \right)^2.$$

Так как процесс протекает обратимо, то энтропия неизменна: $S_1 = S_0$.

2) При быстром изменении ускорения газ за время выключения двигателя не успевает переместиться и поэтому не совершает работы против внешних сил. В результате $Q = A = 0$, и поэтому U , а следовательно, и температура не изменяются. Энтропия может быть вычислена согласно общей формуле

$$S = R \sum_i \nu_i \ln \frac{\Delta V_i}{\Delta \nu_i} = R \int \frac{dV}{v(r)} \ln v(r),$$

где $v(r)$ — молярный объем в точке r . Но проще воспользоваться тем фактом, что исходные состояния газа в обоих случаях совпадают, а конечные различаются температурой на $T_0 - T_1$. Поэтому изменение энтропии

$$S_2 - S_0 = \frac{\nu C_V}{T_0} (T_0 - T_1) = \frac{1}{24} \frac{mR}{\mu} \left(\frac{\mu ah}{RT_0} \right)^2.$$

2.25. $\Delta S = - \frac{R}{24} \left(\frac{\mu \omega^2 r^2}{2RT} \right)^2$ (ср. предыдущую задачу).

2.26. Применяя формулу Стокса для силы сопротивления при вязком движении, получаем

$$R^{3/2} \sim \frac{2\eta}{g(\rho - \rho_0)} \sqrt{\frac{kT}{\rho}} \quad \text{и} \quad R \sim 10^{-3} \text{ см.}$$

В осадок выпадают частицы, для которых средняя высота столба, оцененная по барометрической формуле, $h \sim kT/mg \lesssim R$ (m — масса частиц), что эквивалентно

$$R \gtrsim \left(\frac{kT}{4\rho g} \right)^{1/4} \sim 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Следовательно, в краске выпадает осадок.

2.27. Из-за малости отверстия можно считать, что его существование не влияет на распределение атомов газа (по объему и по скоростям) и что поток идет по типу молекулярной эффузии. Поэтому поток частиц равен $N = Sn\bar{v}/4$, где n — концентрация, а \bar{v} — средняя тепловая скорость. Средняя энергия, уносимая каждым вылетающим атомом:

$$E_{\text{выл}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x dv_y \int_0^{\infty} dv_z (mv^2/2) v_z e^{-mv^2/2kT}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x dv_y \int_0^{\infty} dv_z v_z e^{-mv^2/2kT}} = 2kT$$

превышает среднюю тепловую энергию $\bar{E} = 3kT/2$ на $kT/2$. Поэтому для того, чтобы поддерживать постоянной температуру газа, надо подводить поток тепла $Q = (kT/2)N$. Уменьшение концентрации во времени определяется уравнением

$$\frac{d}{dt} (nV) = -N = -\frac{Sn\bar{v}}{4},$$

откуда

$$n(t) = n_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{4V}{S\bar{v}}, \quad Q = \frac{kT}{8} S\bar{v}n_0 e^{-t/\tau}.$$

2.28. Задача очень близка к предыдущей. Записывая законы сохранения числа частиц и энергии:

$$\frac{d}{dt} (nV) = -N, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} kTnV \right) = -2kTN,$$

исключаем из них n и dn/dt . Тогда для $T(t)$ получается уравнение

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{12} \frac{S}{V} T\bar{v}(T),$$

которое с начальным условием $T(0) = T_0$ дает

$$T = \frac{T_0}{[1 + (S/6V) \sqrt{kT_0/2\pi mt}]^2}$$

(m — масса атома).

2.29. Так как по условию задачи пар у поверхности является насыщенным, то темп испарения лимитируется скоростью диффузии пара по трубке. Уравнение, определяющее баланс массы при испарении и диффузии, имеет вид

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{\rho_{\text{нас}}}{2\rho} \frac{D}{l-h},$$

где $h(t)$ — высота столба жидкости в трубке, а ρ — плотность воды. Интегрируя его с начальным условием $h(0) = l/2$ и используя $D \approx \frac{1}{3}\bar{v}\Lambda$, находим для времени испарения

$$t = \frac{9RT\rho l^2}{4\bar{v}\Lambda\rho_{\text{нас}}\mu} \approx 160 \text{ дней};$$

здесь μ — молярная масса воды.

2.30. Дрейфовая скорость $v_{\text{др}} = \mu E$, где μ — подвижность, связанная с коэффициентом диффузии $D \approx \frac{1}{3}\bar{v}\Lambda$ соотношением Эйнштейна $eD = kT\mu$. Поэтому

$$v_{\text{др}} \approx \frac{e\bar{v}\Lambda}{m\nu^2} E \approx 15 \text{ м/с.}$$

2.31. Так как $\Lambda \gg d$, то при течении газа по трубке роль длины пробега будет играть диаметр d и поэтому эффективный коэффициент диффузии $D_{\text{эфф}} \sim \bar{v}d$. Поток по трубе

$$N = -\frac{\pi d^2}{4} D_{\text{эфф}} \frac{dn}{dx} \sim d^3;$$

поэтому при уменьшении d вдвое концентрация газа в сосуде возрастет в $2^3 = 8$ раз.

2.32. При давлении $p = 10^{-4}$ мм рт. ст. длина свободного пробега $\Lambda \sim 1 \text{ м} \gg R$, т. е. течение будет кнудсеновским. В этих условиях молекулярный поток

$$N = \frac{2}{3} \pi R^3 \bar{v} \frac{n - n_1}{l},$$

где n — концентрация в объеме, n_1 — концентрация на выходе из трубопровода, а \bar{v} — средняя тепловая скорость. По определению производительности $N = n_1 V_{1,2}$

Производительность V , которая обеспечивает тот же поток при откачке непосредственно из объема, удовлетворяет условию $N = nV$. Исключая из полученных трех уравнений n и n_1 , находим

$$V = \frac{V_1}{1 + \frac{3}{2\pi} \frac{V_1}{R^3 \bar{v}}} \approx 330 \text{ л/с.}$$

2.33. Время диффузии на расстояние порядка πR_3 , где R_3 — радиус Земли, оценивается как $t_{\text{дифф}} \sim (\pi R_3)^2 / \bar{v} \Lambda$, что при $R_3 \sim 6 \cdot 10^8$ см, $\Lambda \sim 10^{-5}$ см, $\bar{v} \sim 3 \cdot 10^4$ см/с дает $t_{\text{дифф}} \sim 4 \cdot 10^{11}$ лет, т. е. $t_{\text{дифф}} \sim 10^{11} t_{\text{турб}}$.

2.34. Поскольку при давлении, указанном в условии задачи, длина свободного пробега $\Lambda \gg S^{1/2}$ (т. е. геометрических размеров отверстия), поток будет молекулярным. При этом выход отдельных молекул является независимым, и поэтому N подчиняется распределению Пуассона. Следовательно,

$$\frac{\sqrt{(\Delta N)^2}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{2}{\sqrt{n \bar{v} S t}} \approx 10^{-6},$$

где \bar{v} — средняя скорость, а n — концентрация атомов гелия в сосуде. Согласно распределению Пуассона вероятность того, что при одном из измерений будет зафиксировано N частиц, равна

$$\omega(N) = \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}}.$$

Вероятность того, что $N = 0$, равна $\omega(0) \approx \exp\{-10^{12}\}$.

2.35. Используя определение средних и распределение Больцмана, получаем в случае а)

$$\left[\frac{(\Delta U)^2}{\bar{U}^2} \right]^{1/2} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (U(x) - \bar{U})^2 e^{-U(x)/kT} dx \right]^{1/2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-U(x)/kT} dx} = \sqrt{2},$$

где $U(x) = Kx^2/2$. В случае б) флуктуация равна $\left(\frac{2}{3N-5}\right)^{1/2}$ и $\left(\frac{2}{3(N-1)}\right)^{1/2}$ для молекул с линейным и нелинейным расположением атомов соответственно. В случае в) флуктуация равна $\sqrt{2/N_A}$.

2.36. Так как температура остается неизменной, то флуктуация давления целиком связана с флуктуацией числа частиц. Воспользуемся связью между вероятностью и энтропией. Энтропия начального и конечного состояний

$$S_0 = 2R\nu \ln \frac{V}{\nu},$$

$$S = R(\nu + \Delta\nu) \ln \frac{V}{\nu + \Delta\nu} + R(\nu - \Delta\nu) \ln \frac{V}{\nu - \Delta\nu},$$

где ν — количество молей газа в каждом из сосудов, а $\Delta\nu = \frac{V}{RT} \Delta p$ — количество молей, перешедших из одного сосуда в другой при флуктуации. При $|\Delta\nu| \ll \nu$ получаем

$$\Delta S = -R \frac{(\Delta\nu)^2}{\nu} \quad \text{и} \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \exp \left\{ -nV \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2 \right\},$$

где n — равновесная концентрация молекул газа. Окончательно

$$V = \frac{kT}{p} \left(\frac{p}{\Delta p} \right)^2 \ln \frac{\omega_0}{\omega} \approx 4 \text{ см}^3.$$

2.37. Рассматривая флуктуации температуры, считаем число молей в объеме ν и вне его (ν_1 и ν_2 соответственно) фиксированными. Вначале будем считать сосуд полностью изолированным, так что $Q = A = 0$, и постоянство внутренней энергии выражается формулой

$$\Delta U = \nu_1 C_V \Delta T_1 + \nu_2 C_V \Delta T_2 = 0.$$

Изменение энтропии, связанное с флуктуацией температуры,

$$\Delta S = \nu_1 C_V \ln \frac{T + \Delta T_1}{T} + \nu_2 C_V \ln \frac{T + \Delta T_2}{T}$$

при $\nu_1 \ll \nu_2$ в области малых флуктуаций приводится к

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \nu_1 C_V \left(\frac{\Delta T_1}{T} \right)^2.$$

Таким образом, распределение вероятностей является гауссовским:

$$\omega(\Delta T_1) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2} \nu_1 \frac{C_V}{k} \left(\frac{\Delta T_1}{T} \right)^2 \right\}.$$

Но для гауссовского распределения $\omega(x) \sim e^{-x^2/2\lambda^2}$ произвольной величины x среднеквадратичная флуктуация

$$\overline{x^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2\lambda^2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2\lambda^2} dx} = \lambda^2.$$

Поэтому применительно к нашей задаче $\overline{(\Delta T_1)^2} = kT^2/v_1 C_V$. Так как еще $p v = v_1 R T$, то окончательно

$$v = \frac{R}{C_V} \frac{kT}{p} \left(\frac{T}{\Delta T} \right)^2 \approx 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3.$$

Размер сосуда из окончательных формул выпадает. Поэтому легко понять, что условие изолированности сосуда является несущественным: процессы, протекающие на очень больших расстояниях, не могут влиять на величину местных флуктуаций.

2.38. Длительности времен пребывания системы в однородном и разделенном состояниях (t_0 и t_1) относятся как соответствующие вероятности, которые в свою очередь могут быть выражены через разность энтропий этих состояний $S_0 - S_1 = 2Nk \ln 2$:

$$\frac{t_0}{t_1} = \frac{\omega_0}{\omega_1} = \exp \frac{S_0 - S_1}{k} = 2^{2N}.$$

Время t_1 разрушения разделенного состояния по порядку величины равно времени разлетания молекул $t_1 \sim d/\bar{v} \sim 10^{-4}$ с ($d \sim 10$ см — размер сосуда). Время t_0 имеет смысл времени ожидания для образования разделенного состояния: $t_0 \sim 10^{10}$ лет $\sim 10^{17}$ с. Отсюда

$$N = \frac{\lg(t_0/t_1)}{2 \lg 2} \approx 35.$$

2.39. Энергия, связанная с возникновением изотермической флуктуации объема, определяется работой против квазиупругой силы $(\partial p/\partial V)_T \Delta V$. Поэтому энергия равна

$$E(\Delta V) = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right| (\Delta V)^2,$$

а вероятность флуктуации в соответствии с распределением Больцмана равна

$$\omega(\Delta V) \sim \exp \left\{ - \frac{1}{2kT} \left| \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right| (\Delta V)^2 \right\},$$

т. е. распределение является гауссовским. Среднеквадратичная флуктуация (ср. задачу 2.37)

$$\overline{(\Delta V)^2} = kT \left| \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \right|.$$

Вычисляя $(\partial p / \partial V)_T$ для газа Ван-дер-Ваальса и полагая затем в производной молярный объем равным критическому, находим

$$\frac{\overline{(\Delta V)^2}}{V^2} = \frac{4b}{3N_A V} \frac{T}{T - T_{кр}},$$

где N_A — число Авогадро. Видно, что флуктуации резко нарастают при приближении к критической точке. Если $T \approx T_{кр}$, то $N_A V \approx 3bN$, где N — число молекул газа в объеме V . Тогда

$$\frac{\overline{(\Delta V)^2}}{V^2} \approx \frac{4}{9N} \frac{T}{T - T_{кр}}.$$

2.40. В соответствии с известной формулой для температурной зависимости давления насыщенного пара

$$p(T) = p_0 \exp \left\{ \frac{\Lambda}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right\},$$

где $\Lambda = \lambda \mu$ — молярная теплота испарения. Условие открывания клапана: $F = \frac{\pi D^2}{4} (p - p_0)$. Окончательно $F \approx \approx 18$ Н.

2.41. Давление в подземном резервуаре $p = p_0 + \rho g h$, где p_0 — атмосферное давление. Кипение наступит при $p(T) = p$, где давление насыщенных паров

$$p(T) = p_0 \exp \left\{ \frac{\Lambda}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right\}.$$

Кипение прекратится, когда температура воды, понижающаяся за счет кипения, сравняется с T_0 . Это произойдет после того, как выкипит масса воды

$$\Delta M \approx \frac{MC}{\Lambda} (T - T_0),$$

где C — молярная теплоемкость воды. Определяя из первого уравнения T , затем из второго находим $\Delta M / M \approx \approx 0,14$.

2.42. Согласно уравнению Клапейрона — Клаузиуса вдоль кривой плавления

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T\Delta V}, \quad q = T(S_{\text{ж}} - S_{\text{тв}}).$$

Минимуму давления $dp/dT = 0$ соответствует $q = 0$. Из данных по энтропии обеих фаз следует, что соответствующая температура $T_{\text{min}} = \Theta \ln 2 \approx 0,15$ К. Теплота плавления $q = RT^2/\Theta - RT \ln 2$ описывается параболой, которая проходит через нуль при T_{min} . При более низких температурах $q < 0$. Изменение знака теплоты плавления является уникальным фактом и называется эффектом Померанчука. Отрицательному q отвечает падающий участок на кривой $p(T)$. Подчеркнем, что для гелия-3 он возникает в условиях $\Delta V > 0$ (в отличие от обычной ситуации, когда он возникает вследствие $\Delta V < 0$, как это имеет место для системы вода — лед). Интегрирование уравнения Клапейрона — Клаузиуса дает

$$p(T) = p_{\text{min}} + \frac{R\Theta}{2\Delta V} \left(\frac{T}{\Theta} - \ln 2 \right)^2.$$

Отсюда $p(0) \approx 32,5$ атм.

2.43. Уравнение механического равновесия, определяющее распределение давления внутри ядра:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g(r) = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2r,$$

где γ — гравитационная постоянная, а $g(r)$ — ускорение свободного падения. Согласно уравнению Клапейрона — Клаузиуса для кривой равновесия фаз

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T\Delta V} = -\frac{\rho^2q}{T\Delta\rho},$$

где q — удельная теплота плавления. Разделив эти уравнения друг на друга (в точке $r = R$, где они справедливы одновременно), находим

$$\frac{dT}{dR} = \frac{4\pi}{3} \frac{\gamma\Delta\rho}{q} RT.$$

Это уравнение связывает радиус R твердой части с температурой T . Учитывая также, что

$$\frac{dR}{dT} = \frac{dR/dt}{dT/dt} = -\frac{1}{u} \frac{dR}{dt},$$

находим.

$$\Delta R = -\frac{3}{4\pi} \frac{qut}{\gamma \Delta \rho RT} \approx -35 \text{ км.}$$

2.44. Внутренняя энергия системы

$$U = m_{\text{п}} u_{\text{п}} + m_{\text{ж}} u_{\text{ж}},$$

где $u_{\text{п}}$ и $u_{\text{ж}}$ — удельные внутренние энергии пара и жидкости. Дифференцируя U по T с учетом сохранения полной массы $m_{\text{п}} + m_{\text{ж}} = \text{const}$, получаем

$$(m_{\text{п}} + m_{\text{ж}}) c = (u_{\text{п}} - u_{\text{ж}}) \frac{dm_{\text{п}}}{dT} + \left(\frac{3R}{\mu} m_{\text{п}} + c_0 m_{\text{ж}} \right).$$

В первом члене $u_{\text{п}} - u_{\text{ж}} = \lambda - kT/\mu$ ($\lambda = \Lambda/\mu$ — теплота парообразования, т. е. разность энтальпий, в расчете на единицу массы), и в соответствии с уравнением Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{dm_{\text{п}}}{dT} = \frac{\mu}{RT^2} \left(\lambda - \frac{RT}{\mu} \right) m_{\text{п}}.$$

Окончательно

$$c = \frac{1}{1+\beta} \left\{ c_0 + \beta \left[\frac{3R}{\mu} + \frac{\mu}{RT^2} \left(\lambda - \frac{RT}{\mu} \right)^2 \right] \right\} \approx 10^4 \text{ Дж/(К} \cdot \text{кг)}.$$

2.45. Ответ получается из решения предыдущей задачи предельным переходом $\beta \rightarrow \infty$:

$$c = \frac{3R}{\mu} + \frac{\mu}{RT^2} \left(\frac{\Lambda}{\mu} - \frac{RT}{\mu} \right)^2 \approx 7 \cdot 10^4 \text{ Дж/(К} \cdot \text{кг)}.$$

2.46. Полное изменение энтропии складывается из изменения объемной и поверхностной энтропии. Объемная энтропия

$$(\Delta S)_{\text{об}} = \nu R \ln \frac{V'}{V} = \frac{p_0}{T} \frac{4}{3} \pi r^3 \ln 8 = 4\pi \ln 2 \frac{p_0 r^3}{T},$$

так как в принятом приближении давление внутри пузыря равно p_0 . Удельная поверхностная энтропия $s = q/T$, где q — теплота изотермического образования единицы поверхности, что следует из обычного определения $dQ = T dS$. Поэтому

$$(\Delta S)_{\text{пов}} = 2 \cdot 4\pi [(r')^2 - r^2] \frac{q}{T} = 24\pi r^2 \frac{q}{T}.$$

Окончательно

$$\Delta S = \frac{24\pi r^2}{T} \left(q + \frac{\ln 2}{6} p_0 r \right).$$

3.1. На электрон, вылетевший из отрицательно заряженной пластины, действуют сила со стороны электрического поля в конденсаторе $F_1 = eE$ и сила электрического изображения $F_2 = -e^2/(4\pi\epsilon_0 \cdot 4x^2)$. Полная сила, действующая на электрон, есть

$$F = eE - \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x^2}.$$

Из этого выражения следует, что электрон замедляется до тех пор, пока $x < \sqrt{e/(16\pi\epsilon_0 E)}$. Скорость электрона минимальна при

$$x = x_0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{e}{\pi\epsilon_0 E}} \approx 10^{-6} \text{ м.}$$

Отметим, что приведенное решение не учитывает пространственного заряда, который может образоваться вблизи отрицательно заряженной пластины.

3.2. В электрическом поле молекулы газа приобретают дипольный момент $p = \epsilon_0 \alpha E$ и энергию (см. задачу 3.16) $W = -pE/2 = -\epsilon_0 \alpha E^2/2$. В силовом поле молекулы имеют больцмановское распределение:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) = n_0 \exp \frac{\epsilon_0 \alpha E^2}{2kT},$$

где n_0 — концентрация молекул вне конденсатора. Подстановка числовых значений показывает, что показатель экспоненты мал по сравнению с единицей. Поэтому можно записать

$$\frac{\Delta n}{n_0} \approx \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \alpha E^2}{kT} \approx 4 \cdot 10^{-8}.$$

Концентрация молекул (а следовательно, и давление) в конденсаторе выше, чем в остальной части сосуда. Физической причиной увеличения давления в конденсаторе является втягивание молекул, обладающих дипольным моментом, в области сильного поля.

3.3. Легко показать, используя теорему Гаусса, что напряженность электрического поля однородно заряженного шара при $r \leq R$ выражается формулой

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho r.$$

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из центра шара в точку наблюдения, Q — полный заряд шара, R — его радиус, ρ — объемная плотность заряда. Поле в полости можно рассматривать как суперпозицию полей двух однородно заряженных шаров:

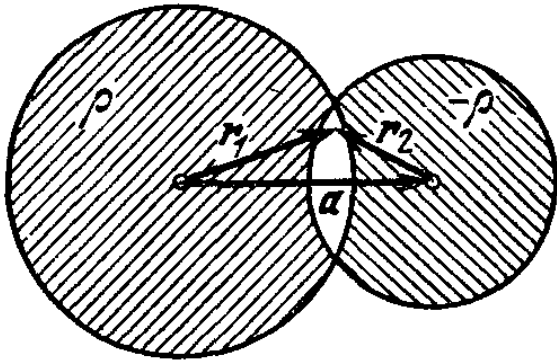


Рис. 67.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \mathbf{r}_1 - \\ &- \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \mathbf{r}_2 = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \\ &= \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Обозначения ясны из рис. 67.

Таким образом, электрическое поле в полости оказывается однородным. Этот вывод остается справедливым независимо от соотношения радиусов шаров и расстояния между их центрами. В частности, в незаряженной сферической полости, вырезанной внутри однородно заряженного шара большего радиуса, поле однородно.

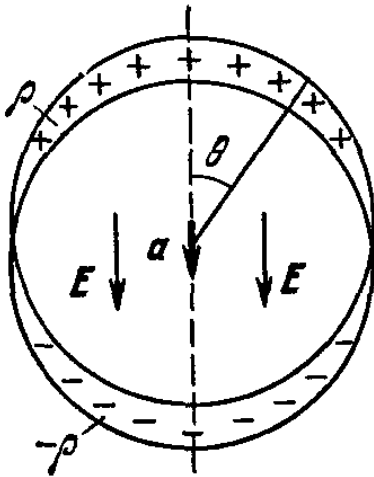


Рис. 68.

3.4. Используя результат решения задачи 3.3, рассмотрим два одинаковых шара радиусов R , несущих равномерно распределенные по объему заряды с плотностями ρ и $-\rho$. Пусть шары пересекаются так, что между их центрами остается некоторое расстояние $a \ll R$. В области пересечения шаров заряды окажутся скомпенсированными. Как следует из решения задачи 3.3, поле в этой области будет однородным:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \mathbf{a}.$$

Здесь \mathbf{a} — вектор, соединяющий центры шаров. Как показано на рис. 68, объемный заряд отличен от нуля только в тонком поверхностном слое. Переходя к пределу при $a \rightarrow 0$ (при условии, что $\rho a = \text{const}$), мы придем к представлению о поверхностном заряде на сфере. Легко видеть, что толщина заряженного слоя в точке,

определяемой углом θ , есть $a \cos \theta$ и, следовательно, на единицу площади приходится заряд

$$\sigma(\theta) = \rho a \cos \theta = 3\varepsilon_0 E \cos \theta.$$

Поскольку поле однородно заряженного шара совпадает при $r > R$ с полем точечного заряда, расположенного в его центре, мы можем заключить, что в нашем случае поле вне сферы есть поле точечного диполя, дипольный момент которого равен

$$\mathbf{p} = -Qa = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho a = -4\pi\varepsilon_0 R^3 E.$$

Можно проверить, что однородное поле внутри сферы и поле диполя вне ее удовлетворяют граничным условиям на поверхности сферы, что указывает на правильность найденного решения.

3.5. Из решения задачи 3.4 следует, что проводящий шарик радиуса R приобретает во внешнем однородном поле \mathbf{E} дипольный момент

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \mathbf{E}.$$

Действительно, электрическое поле внутри проводящего шарика должно обратиться в нуль. Для этого заряды на шарике должны перераспределиться так, чтобы поле этих зарядов внутри шарика было однородным и компенсировало внешнее поле. Тогда вне шарика поле этих зарядов будет совпадать с полем диполя.

Единица объема «идеального газа», состоящего из проводящих шариков, приобретает во внешнем поле электрический момент \mathbf{P} , равный

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 n R^3 \mathbf{E}.$$

Теперь можно записать

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + 4\pi n R^3) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}.$$

Отсюда следует

$$\varepsilon = 1 + 4\pi n R^3.$$

Условие малости концентрации шариков позволяет пренебречь взаимодействием шариков при определении дипольного момента.

3.6. Электрическое поле вне сферической пылинки будет складываться из однородного внешнего поля \mathbf{E}

и поля диполя E_d :

$$E_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(pr) r}{r^5} - \frac{p}{r^3} \right],$$

дипольный момент которого (см. задачу 3.4)

$$p = 4\pi\epsilon_0 R^3 E.$$

В точках C и D поле $E_d = -E$, а в точках A и B $E_d = 2E$. Отсюда следует, что суммарное поле в точках C и D окажется равным нулю, а в точках A и B возрастает в три раза.

3.7. Дипольный момент p атома аргона во внешнем поле E можно записать в виде

$$p = Zxe = \epsilon_0 \alpha E,$$

где x — смещение электрической оболочки, Z — число электронов в атоме, α — атомная поляризуемость:

$$\alpha = Zxe/\epsilon_0 E.$$

Диэлектрическая проницаемость ϵ связана с атомной поляризуемостью α соотношением

$$\epsilon = 1 + n_0 \alpha,$$

где $n_0 = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ — концентрация атомов при нормальных условиях (число Лошмидта). Следовательно,

$$x = (\epsilon - 1) \epsilon_0 E / n_0 Ze \approx 2 \cdot 10^{-18} \text{ м} = 2 \cdot 10^{-16} \text{ см}.$$

Обратим внимание, что атомы имеют размер порядка 10^{-8} см, что значительно превышает величины их деформации в электрических полях.

$$3.8. \rho(r) = \frac{3e}{4\pi R^3} = \text{const}, \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}} = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ Гц}.$$

Найденное значение частоты ν относится к оптическому диапазону.

3.9. В системе отсчета, связанной с ракетой, на электроны вещества действует сила инерции ma . В состоянии равновесия эта сила должна уравниваться силой eE со стороны электрического поля. Следовательно, на концах проводника, имеющего длину l , возникает при ускорении разность потенциалов $U = El = = mal/e$. Таким образом, ускорение можно измерить по значению разности потенциалов U . При $a = 10g$ и

$l = 10$ м $U \approx 6 \cdot 10^{-9}$ В. Современная техника в принципе позволяет измерять такие малые разности потенциалов. Отметим, что в данном случае обычная схема измерения, когда измерительное устройство с помощью соединительных проводов подключается к точкам на концах рассматриваемого проводника, не годится из-за аналогичного эффекта в самих соединительных проводах. Однако можно определить U косвенным путем, измеряя, например, амплитуду тока в проводнике при периодическом изменении его ориентации на 180° .

3.10. На внешней поверхности заряд распределен равномерно:

$$\sigma = q/4\pi R^2.$$

Поле вне оболочки совпадает с полем точечного заряда q , помещенного в ее центр:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}.$$

Для определения σ_1 и σ_2 нужно знать электрическое поле внутри оболочки. С помощью метода электрических

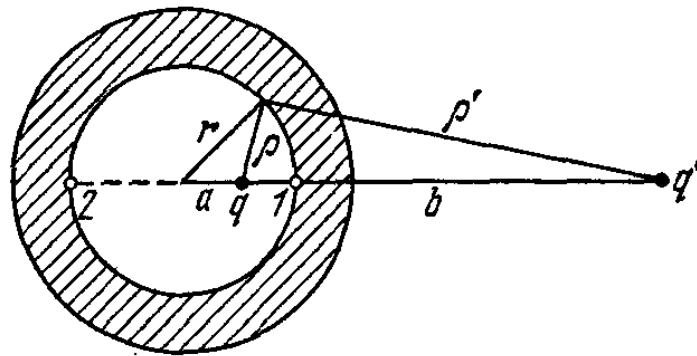


Рис. 69.

изображений можно показать, что электрическое поле внутри оболочки совпадает с полем двух точечных зарядов q и q' (рис. 69). Заряд-изображение q' имеет величину

$$q' = -q \frac{r}{a}$$

и расположен от центра оболочки на расстоянии

$$b = \frac{r^2}{a}.$$

Величина и положение заряда-изображения выбираются из условия, что в поле зарядов q и q' внутренняя

поверхность оболочки является эквипотенциальной поверхностью нулевого потенциала:

$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'} = 0.$$

Напряженность поля в точках 1 и 2:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r-a)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{(b-r)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1+a/r}{(r-a)^2},$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r+a)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{(b+r)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-a/r}{(r+a)^2}.$$

Теперь можно определить поверхностные плотности σ_1 и σ_2 , используя граничное условие на поверхности проводника $E_n = \sigma/\epsilon_0$. Расстановка знаков в этом соотношении соответствует выбору внешней нормали. В нашем случае $E_{1n} = -E_1$, $E_{2n} = -E_2$, поэтому

$$\sigma_1 = -\frac{q}{4\pi} \frac{1+a/r}{(r-a)^2}, \quad \sigma_2 = -\frac{q}{4\pi} \frac{1-a/r}{(r+a)^2}.$$

3.11. Из условия непрерывности нормальных компонент вектора индукции $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ имеем

$$E_1 = E_3 = E = E_2 + \frac{P}{\epsilon_0}.$$

Здесь E_1 и E_3 — поля в воздушных зазорах, E_2 — поле в пластине. Разность потенциалов между обкладками равна нулю, поэтому

$$E(d-h) + E_2 h = 0.$$

Отсюда

$$E_2 = -\frac{P}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{d}\right), \quad D_2 = \epsilon_0 E_2 + P = P \frac{h}{d}.$$

$$3.12. \quad E_A = \frac{1}{2\epsilon_0} P, \quad \frac{E_A}{E_B} = \left(\frac{l}{r}\right)^2.$$

3.13. Поле в пластине

$$E_1 = -\frac{P}{\epsilon_0} = -\frac{P_0}{\epsilon_0} \left[1 - \frac{x^2}{d^2}\right].$$

Поле вне пластины

$$E_2 = 0.$$

Разность потенциалов между боковыми гранями пластины

$$U = - \int_{-d}^d E_1 dx = \frac{P_0}{\epsilon_0} \int_{-d}^d \left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right) dx = \frac{4}{3\epsilon_0} P_0 d.$$

3.14. Если вся энергия конденсатора пойдет на нагревание газа, то он нагреется до такой высокой температуры, что все атомы будут ионизированы. Обозначая через N число молекул водорода в заданном объеме, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{CU^2}{2} = 4N \frac{3}{2} kT - N \frac{3}{2} kT_0.$$

Множитель 4 в первом слагаемом правой части учитывает процессы диссоциации и ионизации. В этом соотношении можно пренебречь вторым слагаемым в правой части ($T \gg T_0$). Принимая во внимание, что $N = pV/kT_0$, найдем

$$T = T_0 \frac{CU^2}{12pV} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ К.}$$

Одной из возможных причин снижения температуры может явиться нагрев обкладок конденсатора. Если бы вся энергия разряда была затрачена на нагрев обкладок, закон сохранения энергии принял вид

$$\frac{CU^2}{2} = cm \Delta T,$$

откуда $\Delta T \approx 200$ К. Таким образом, относительно небольшой нагрев обкладок конденсатора может на несколько порядков снизить температуру газа.

3.15. Применим метод электрических изображений. Как показано на рис. 70, диполь-изображение имеет дипольный момент $-p$. Напряженность электрического поля этого диполя на его оси (в точке, где находится основной диполь) есть

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{3(p\mathbf{r})}{r^5} + \frac{p}{r^3} \right] = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Здесь r — расстояние до изображения, равное в нашем случае $2L$. Сила, действующая на диполь с моментом p в неоднородном электрическом поле E , определяется соотношением $F = (p\nabla) E$, откуда следует

$$F = p \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{3p^2}{2\pi\epsilon_0 r^4} = \frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 L^4} \approx 5,4 \cdot 10^{-6} \text{ Н} = 0,54 \text{ дин.}$$

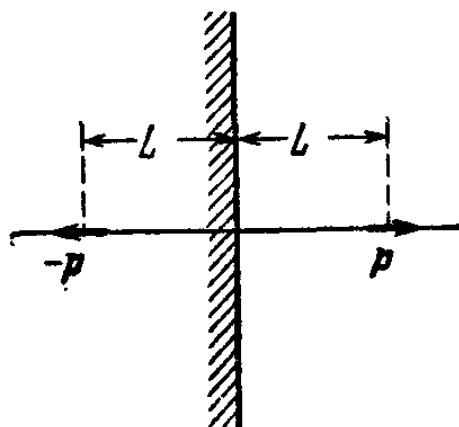


Рис. 70.

Как видно, $F > 0$; это означает, что диполь отталкивается от проводящей плоскости.

Найдем теперь работу внешних сил, необходимую для смещения диполя в новое положение:

$$A = - \int_L^{L_1} F dx = - \int_L^{L_1} \frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 x^4} dx = \frac{p^2}{32\pi\epsilon_0 L^3} \left(\frac{L^3}{L_1^3} - 1 \right) = \\ = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ Дж} = 0,16 \text{ эрг.}$$

3.16. Жесткий электрический диполь можно внести из бесконечности в данную точку поля без совершения работы, перемещая его, например, вдоль одной из силовых линий при условии, что все время $p \perp E$. Поэтому энергия жесткого диполя во внешнем поле может быть

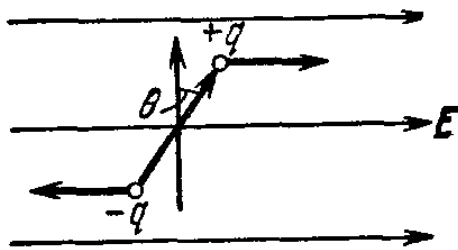


Рис. 71.

определена через работу внешних сил, затрачиваемую для поворота диполя (рис. 71):

$$W = A = - 2q \frac{l}{2} \sin \theta \cdot E = \\ = pE \sin \theta = - (pE).$$

Здесь l — длина диполя, q — его заряд.

Для определения энергии упругого диполя рассмотрим процесс квазистатического изменения дипольного момента при изменении внешнего поля. Пусть длина диполя изменилась на dl ; тогда электрические силы совершат работу

$$qE dl = \alpha\epsilon_0 E dE.$$

Определяя энергию диполя через работу внешних сил, найдем

$$W = - \frac{\alpha\epsilon_0 E^2}{2} = - \frac{pE}{2} = - \frac{(pE)}{2}.$$

3.17. $U = \frac{mv_0^2}{2e} \frac{l}{d} \approx 14 \text{ мкВ}$, где m и e — масса и заряд электрона.

3.18. Решение задачи может быть найдено методом электрических изображений. Поле точечного заряда q и поле заряда-изображения должны удовлетворять граничным условиям на границе диэлектрика. В результате получим

$$\sigma(\rho) = - \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{qL}{(\rho^2 + L^2)^{3/2}}.$$

Здесь ρ — расстояние до основания перпендикуляра, опущенного из точки, в которой находится заряд q , на поверхность диэлектрика. Полный заряд Q , индуцированный на поверхности диэлектрика, есть

$$Q = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} q.$$

Поле поверхностных зарядов в полупространстве над диэлектриком такое же, как поле точечного заряда Q , расположенного внутри диэлектрика на расстоянии L от границы.

Сила, действующая на заряд q , определяется выражением

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{4L^2} = -\frac{1}{16\pi\varepsilon_0} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{q^2}{L^2}.$$

Знак минус означает, что заряд q притягивается к диэлектрику.

3.19. Применим закон сохранения энергии к процессу перезарядки конденсатора после сближения пластин:

$$Q = A_{\text{бат}} - \Delta W_{\text{э}}.$$

Здесь Q — джоулево тепло, выделившееся на сопротивлении, $A_{\text{бат}}$ — работа сторонних сил в батарее, $\Delta W_{\text{э}}$ — изменение электрической энергии конденсатора. Обозначая через Δq изменение заряда конденсатора в процессе перезарядки, можно записать

$$\Delta q = \Delta C \mathcal{E} = (2C - C) \mathcal{E} = C \mathcal{E}, \quad A_{\text{бат}} = \Delta q \mathcal{E} = C \mathcal{E}^2.$$

При написании выражения для $\Delta W_{\text{э}}$ следует учесть, что после сближения пластин емкость конденсатора стала равной $2C$ и, следовательно, разность потенциалов при неизменном заряде — равной $\mathcal{E}/2$. После окончания процесса перезарядки разность потенциалов вновь будет равна \mathcal{E} . Поэтому

$$\Delta W_{\text{э}} = \frac{2C \mathcal{E}^2}{2} - \frac{2C (\mathcal{E}/2)^2}{2} = \frac{3}{4} C \mathcal{E}^2.$$

Таким образом,

$$Q = \frac{1}{4} C \mathcal{E}^2.$$

Для того чтобы за время Δt сближения пластин заряд конденсатора практически не изменился, необходимо выполнить условие

$$\Delta t \ll \tau = RC.$$

Постоянная $\tau = RC$ определяет скорость процессов в цепи, состоящей из сопротивления и конденсатора. Подставляя числовые значения, получим оценку

$$R \gg \frac{\Delta t}{C} = 10^8 \text{ ом.}$$

3.20. При оценке мы будем предполагать, что поле острия иглы совпадает с полем заряженного шара. В электрическом поле с напряженностью E атом приобретает дипольный момент $p = \alpha \epsilon_0 E$. На диполь в неоднородном поле действует сила $F = p \frac{\partial E}{\partial r}$. В итоге получим

$$F = \frac{2\alpha\epsilon_0}{r^5} \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} = \frac{2\alpha\epsilon_0 R^2 \varphi^2}{r^5} \approx 10^{-11} \text{ Н} = 10^{-6} \text{ дин.}$$

В этом выражении $r = R + l = 300 \text{ \AA} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ — расстояние от атома до центра кривизны острия, поляризуемость $\alpha \approx a^3$, где $a \approx 10^{-10} \text{ м}$ — размер атома.

3.21. Поскольку $\lambda_1 \gg \lambda$, можно с хорошим приближением считать, что цилиндрические проводники по всей своей длине имеют постоянные потенциалы, и для определения поля рассматривать электростатическую задачу. Пусть линейная плотность зарядов на проводниках есть $\pm \rho$. Применяя теорему Гаусса к одному из стержней, найдем, что напряженность поля стержня на расстоянии r от его оси равна

$$E = \pm \rho / (2\pi\epsilon_0 r).$$

Разность потенциалов между стержнями находим путем интегрирования напряженности поля:

$$U = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{b-r_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right) dr = \frac{\rho}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{b-r_0}{r_0} \approx \frac{\rho}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{r_0}.$$

Полный ток \mathcal{I} легко найти, если принять во внимание, что вблизи каждого из стержней поле практически не зависит от заряда другого стержня ($b \gg r_0$). Предполагая,

что плотность тока постоянна по толщине листа, получим для полного тока, вытекающего из цилиндрического проводника:

$$\mathcal{I} = 2\pi r_0 a j = 2\pi r_0 a \lambda E = \frac{a \lambda \rho}{\epsilon_0}.$$

Следовательно,

$$R = \frac{U}{\mathcal{I}} \approx \frac{1}{\pi \lambda a} \ln \frac{b}{r_0}.$$

3.22. В первом случае при увеличении напряжения ток не изменится; поэтому мощность, выделяемая на аноде, возрастает в два раза. В стационарном состоянии эта мощность при достаточно высокой температуре анода рассеивается главным образом в виде излучения и поэтому $W \sim T^4$, где T — абсолютная температура (мы будем пренебрегать при оценках теплоотдачей через проводники и другие конструктивные элементы кенотрона). Таким образом, в этом случае температура (по абсолютной шкале) возрастает в $2^{1/4} \approx 1,2$ раза, т. е. достигнет значения $\approx 1014^\circ\text{C}$. Во втором случае ток увеличится в $2^{3/2}$ раза (закон «3/2»), так что мощность возрастает в $2 \cdot 2^{3/2} = 2^{5/2}$ раза, и температура поднимется в $(2^{5/2})^{1/4} = 2^{5/8}$ раза, т. е. достигнет приблизительно 1400°C .

3.23. Проводимость λ ионизированного газа пропорциональна концентрации ионов, которая в свою очередь пропорциональна потоку быстрых электронов, пролетающих между сферами. Таким образом, $\lambda \sim j$. Из закона Ома ($j_{\text{пров}} = \lambda E$) вытекает, что во всем пространстве между сферами электрическое поле постоянно по величине. Следовательно,

$$E = \frac{\mathcal{E}}{R_2 - R_1}.$$

Такое поле в сферическом конденсаторе может возникнуть только при наличии пространственного заряда.

3.24. $\Lambda = \frac{4\pi\lambda}{1/R_1 - 1/R_2}$, где λ — удельная проводимость диэлектрика, R_1 и R_2 — радиусы сфер.

3.25. $\lambda \sim 1/r^4$.

3.26. В стационарном режиме ток нагрузки равен току, переносимому лентой:

$$\mathcal{I} = \sigma l v.$$

Максимальное значение тока определяется электрической прочностью газа:

$$\sigma_{\max} = 2\varepsilon_0 E_{\text{пр}}, \quad \mathcal{I}_{\max} = \sigma_{\max} lv = 2\varepsilon_0 E_{\text{пр}} lv \approx 10^{-3} \text{ А.}$$

Максимальный потенциал сферы также определяется электрической прочностью газа. Для сферического электрода

$$\varphi = RE,$$

где E — напряженность поля вблизи электрода. Поэтому

$$\varphi_{\max} = RE_{\text{пр}} = 4,5 \cdot 10^6 \text{ В.}$$

$$3.27. \quad \varepsilon = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}, \quad \rho = \frac{4\pi R_1 R_2}{C(R_2 - R_1)} \frac{t}{\ln 2}.$$

3.28. Магнитный момент равномерно заряженного шара радиуса R , вращающегося с частотой ω , равен

$$\rho_m = \frac{QR^2\omega}{5},$$

где Q — полный заряд шара. Действительно, магнитный момент кольца с током \mathcal{I} равен $\mathcal{I}S$, где S — площадь кольца. Вводя сферические координаты r, θ, φ , получим, что магнитный момент кольца, имеющего координаты r, θ , равен

$$d\rho_m = \pi\omega r^4 \sin^3\theta \, dr \, d\theta,$$

где ρ — объемная плотность заряда. Интегрируя по r от 0 до R и по θ от 0 до π , приходим к написанной выше формуле для ρ_m .

Введем величину $y = (q_p - q_e)/q_p$ и запишем заряд одного атома в виде $Z(q_p - q_e) = Zyq_p$. Если Земля состоит из атомов с атомным номером Z и относительной атомной массой A , то отношение ее заряда Q к массе M_3 равно

$$\frac{Q}{M_3} = \frac{yZq_p}{m_0A},$$

где m_0 — масса нуклона. С помощью этого соотношения выражение для ρ_m можно представить в виде

$$\rho_m = y \frac{Zq_p}{m_0A} \frac{4\pi}{15} \omega R^3 \rho,$$

где ρ — плотность Земли. Если бы Земля обладала таким магнитным моментом, то индукцию магнитного поля

на полюсе можно было бы определить из выражения

$$B_3 = \frac{2\mu_0 p_m}{4\pi R_3^3}.$$

Отсюда

$$y = \frac{A}{Z} \frac{15m_0 B_3}{2\mu_0 \rho q_p \omega R_3^3} \approx 2,4 \cdot 10^{-19}.$$

Таким образом, высказанная в условии задачи гипотеза о происхождении магнитного поля Земли противоречит экспериментальным данным.

3.29. Растягивающее напряжение в стенках вращающейся трубки может быть определено из условия равновесия упругих сил и центробежных сил инерции. Оно оказывается равным $f = \rho v^2$, где ρ — плотность материала трубки, v — скорость вращения. Предельная скорость вращения $v_{\max} = \sqrt{f_{\max}/\rho} = 4,7 \cdot 10^2$ м/с. При вращении трубки возникает ток переноса, поверхностная плотность которого j дается формулой $j = \sigma v$, где σ — поверхностная плотность заряда. По теореме Гаусса напряженность электрического поля на поверхности $E = \sigma/\epsilon_0$, так что для плотности тока имеем $j = \epsilon_0 E v$. По конфигурации токов вращающаяся трубка напоминает соленоид, поэтому магнитное поле вне трубки равно нулю, а внутри трубки $B = \mu_0 j$. Подставляя $j = \epsilon_0 E v$ и учитывая, что $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$, получаем

$$\frac{\omega_m}{\omega_3} = \frac{B^2/2\mu_0}{\epsilon_0 E^2/2} = \frac{v^2}{c^2} \approx 2,4 \cdot 10^{-12}.$$

$$3.30. \quad \sigma_{\max} = 2\epsilon_0 E = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2,$$

$$B_{\max} = \frac{\mu_0}{2} \sigma_{\max} v = \epsilon_0 \mu_0 E v \approx 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ Т} \approx 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ Гс}.$$

3.31. Определим полную силу, действующую на электрон, находящийся на расстоянии r от оси пучка. Из теоремы Гаусса имеем для электрического поля $E = -en_0 r/2\epsilon_0$. Магнитное поле, действующее на электрон, определяем из теоремы о циркуляции для магнитного поля:

$$H = -\frac{en_0 v r}{2}.$$

Полная сила F , действующая на электрон, равна, таким образом,

$$F = \frac{n_0 e^2 r}{2\epsilon_0} - \frac{\mu_0 n_0 e^2 v^2 r}{2}.$$

Первый член представляет собой кулоновское расталкивание, а второй — магнитное сжатие. Это выражение можно переписать в виде

$$F = \frac{n_0 e^2 r}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Пусть n — концентрация положительных ионов. Условие равновесия электронов в пучке имеет вид

$$\frac{n_0 e^2 r}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{n e^2 r}{2\epsilon_0},$$

откуда

$$\frac{n}{n_0} = 1 - \frac{v^2}{c^2}.$$

3.32. Индукция B магнитного поля внутри цилиндра равна нулю; вне цилиндра вблизи поверхности $B = \mu_0 \mathcal{I} / 2\pi R$. Давление, которое испытывает плазменный цилиндр в магнитном поле,

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}^2}{8\pi^2 R^2}.$$

Подставив числовые значения, получим $p_m \approx 6,4 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$. В нашем случае $p_m < p$ и, следовательно, плазменный цилиндр будет расширяться. Легко подсчитать, что условие $p = p_m$ будет выполнено при токе $\mathcal{I} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ А}$.

3.33. При равновесии газодинамическое давление в плазме уравнивается магнитным давлением:

$$nkT = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

откуда

$$B = \sqrt{2\mu_0 nkT} \approx 6 \text{ Т} = 6 \cdot 10^4 \text{ Гс}.$$

$$3.34. \quad n(r) = \frac{1}{ve\mu_0} \frac{dB}{dr} = \frac{q}{R\mu_0 e} \sqrt{\frac{m}{2eU}} B_0 \left(\frac{r}{R} \right)^{q-1},$$

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 v} B(r) = c^2 \sqrt{\frac{m}{2eU}} B_0 \left(\frac{r}{R} \right)^q.$$

Здесь $v = \sqrt{2eU/m}$ — скорость электронов в пучке, c — скорость света.

3.35. Работа, совершаемая магнитными силами при перемещении контура с током \mathcal{I} в магнитном поле, выражается соотношением

$$A = \mathcal{I} \Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока. В нашем случае $\Delta\Phi = \Delta\Phi_{21}$ — изменение потока, пронизывающего контур прямого тока. В силу теоремы взаимности $\Delta\Phi_{21} = \Delta\Phi_{12}$, если $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$. Поскольку $\Delta\Phi_{12} = -2\Phi_{12}$, задача сводится к определению магнитного потока, пронизывающего рамку в поле прямого тока:

$$\Phi_{12} = - \int_b^{a+b} \frac{\mu_0 \mathcal{I}_1}{2\pi r} a dr = - \frac{\mu_0 \mathcal{I}_1 a}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right).$$

Знак минус определяется выбором положительных направлений токов на рис. 16. Окончательно получим

$$A = \frac{\mu_0 \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 a}{\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right) = 2,72 \cdot 10^{-7} \text{ Дж} = 2,72 \text{ эрг.}$$

3.36. $F = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x} \right)_{\mathcal{I} = \text{const}} = - \left(\frac{\mu_0 r N \mathcal{I}}{4} \right)^2 \frac{1}{[(\pi R/\mu) + x]^2}$, где W_m — магнитная энергия катушки. Знак минус указывает, что обе половинки тороидальной катушки притягиваются друг к другу. При $x = 0$ получим

$$F = - \left(\frac{\mu_0 r N \mathcal{I}}{4\pi R} \right)^2.$$

3.37. Сила, действующая на образец в неоднородном магнитном поле, определяется выражением

$$F = p_m \frac{dB}{dr},$$

где p_m — магнитный момент образца, равный κBV . Эта сила принимает максимальное значение при $r_{\text{max}} = 1/2 \sqrt{\alpha} = 5$ см. Максимальное значение силы F_{max} есть

$$F_{\text{max}} = \kappa V B_0^2 \sqrt{\alpha} e^{-1/2} \approx 10^{-1} \text{ дин.}$$

3.38. При сжатии трубы магнитный поток сохраняется:

$$\pi R_0^2 B_0 = \pi R^2 B, \quad R = R_0 \sqrt{B_0/B}.$$

Увеличение магнитной индукции в трубе обусловлено появлением тока в ее стенках. Таким образом, труба ведет себя подобно соленоиду. Давление магнитного поля определяется соотношением

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$B = \sqrt{2\mu_0 p_m} = 5 \cdot 10^2 \text{ Т}, \quad R = R_0 \sqrt{B_0/B} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

3.39. При движении проводящей жидкости в магнитном поле в цепи возникает э. д. с. индукции, равная vBd . Это выражение легко получить, рассматривая действие силы Лоренца на свободные носители заряда (электроны и ионы). В цепи будет протекать ток

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{E}^{\text{инд}}}{r+R}, \quad \text{где } r = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{S}.$$

Таким образом,

$$P = \mathcal{I}^2 R = \frac{(\mathcal{E}^{\text{инд}})^2 R}{(r+R)^2} = \frac{v^2 B^2 d^2 R}{\left(\frac{1}{\lambda} \frac{d}{S} + R\right)^2}.$$

3.40. Магнитная индукция тока $B = \mu_0 \mathcal{I} / 2\pi R$. Сила F , действующая на стрелку, равна $F = p_m (dB/dR)$, где p_m — магнитный момент стрелки, равный $B_0 V / \mu_0$ (V — объем стрелки). Таким образом, $F = B_0 V \mathcal{I} / 2\pi R^2$. Условие, при котором стрелка поднимется над шпилькой, запишется в виде $F > \rho g V$, где ρ — плотность стали. Отсюда

$$\mathcal{I} > \frac{2\pi \rho g R^2}{B_0} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ А.}$$

3.41. Уравнение малых колебаний бруска имеет вид

$$I \ddot{\phi} = - p_m B_3 \phi,$$

где I — момент инерции бруска, равный $\frac{1}{12} \rho V l^2$ (V — объем бруска), p_m — магнитный момент, равный $B_0 V / \mu_0$. Окончательно уравнение колебаний запишется в виде

$$\ddot{\phi} + \frac{12 B_0 B_3}{\mu_0 \rho l^2} \phi = 0.$$

Частота колебаний определяется соотношением

$$\omega_0^2 = \frac{12 B_0 B_3}{\mu_0 \rho l^2}.$$

Отсюда

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi l \sqrt{\frac{\mu_0 \rho}{12 B_0 B_3}} \approx 4,1 \text{ с.}$$

3.42. Требуется найти остаточную намагниченность шарика. По определению коэффициента размагничивания

$$H_0 - H = \beta I,$$

где H_0 — внешнее магнитное поле, H — поле внутри шарика и I — намагничивание (т. е. магнитный момент единицы объема). В нашем случае внешнее поле равно нулю; поэтому

$$H = -\beta I = \frac{1}{3} I.$$

В этом соотношении H имеет смысл напряженности магнитного поля в шарике, обусловленного остаточной намагниченностью I . Величина магнитной индукции в шарике

$$B = \mu_0 (H + I) = \frac{2}{3} \mu_0 I.$$

Согласно условию задачи $B = B_0 (1 + H/H_k)$. Для определения остаточной намагниченности I получаем уравнение

$$\frac{2}{3} \mu_0 I = B_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{I}{H_k} \right),$$

откуда

$$I = \frac{3B_0 H_k}{2\mu_0 H_k + B_0} \approx 1,2 \cdot 10^4 \text{ А/м}^2.$$

3.43. Применим теорему о циркуляции магнитного поля:

$$H(L - l) + H'l = N\mathcal{J},$$

где H — напряженность поля в сердечнике, H' — напряженность поля в зазоре. Для линейного случая (наклонный участок кривой намагничивания) граничное условие запишется в виде $\mu H = H'$. Таким образом,

$$H(L - l) + \mu l H = N\mathcal{J}, \text{ или } H[L + l(\mu - 1)] = N\mathcal{J}.$$

Отсюда

$$\mathcal{J}_0 = \frac{H_0}{N} [L + l(\mu - 1)].$$

Принимая во внимание, что $(\mu - 1) = \kappa = I_0/H_0$, получим окончательно

$$\mathcal{J}_0 = \frac{1}{N} [LH_0 + I_0].$$

В случае насыщения (при $\mathcal{J} > \mathcal{J}_0$) условие на границе следует записывать в виде

$$H' = H + I_0, \quad \text{т. е.} \quad B' = B.$$

Из теоремы о циркуляции магнитного поля получим

$$(H' - I_0)(L - l) + H'l = N\mathcal{J}, \quad H' = \frac{1}{L} [N\mathcal{J} + I_0(L - l)].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} B' &= \mu_0 H' = \frac{\mu_0}{L} [N\mathcal{J} + I_0(L - l)] = \\ &= \mu_0 \left[H_0 + I_0 + \frac{N}{L} (\mathcal{J} - \mathcal{J}_0) \right]. \end{aligned}$$

$$3.44. \quad \omega = \frac{3}{2} \frac{\pi N B Q}{m} \approx 0,1 \text{ с}^{-1}.$$

$$3.45. \quad \mathcal{J} = I/n.$$

$$3.46. \quad B_A = \frac{\mu_0 I}{2}, \quad \frac{B_A}{B_{A'}} = \left(\frac{l}{r} \right)^2.$$

3.47. Уравнение радиального движения протона в поле электронного пучка записывается в виде (если пренебречь действием магнитного поля)

$$m\ddot{r} + eE_r = 0.$$

Здесь E_r — абсолютная величина радиальной составляющей электрического поля пучка, определяемая из теоремы Гаусса: $2\pi r \epsilon_0 E_r = Q$, где $Q = en\pi r^2$ — заряд на единицу длины трубки радиуса r (n — концентрация электронов в пучке). Таким образом, $E_r = ner/2\epsilon_0$. Принимая во внимание, что $\mathcal{J} = env\pi R^2$, где для релятивистского пучка $v \approx c$, выражение для E_r может быть записано в виде

$$E_r = \frac{\mathcal{J}}{2\pi\epsilon_0 c R^2} r.$$

Уравнение движения протона принимает вид

$$m\ddot{r} + \frac{e\mathcal{J}}{2\pi\epsilon_0 c R^2} r = 0,$$

откуда для частоты собственных колебаний ω находим

$$\omega^2 = \frac{e\mathcal{J}}{2\pi\epsilon_0 c R^2 m}, \quad \text{или} \quad \omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{e\mathcal{J}}{2\pi\epsilon_0 m c}}.$$

Подставляя числовые значения, получаем $\omega = 3,9 \cdot 10^8$ Гц.

3.48. Из решения задачи 3.31 следует, что при $v \ll c$ можно пренебречь магнитной компонентой силы Лоренца, действующей на заряды в пучке, по сравнению с электрической компонентой. Напряженность электрического поля на границе пучка

$$E = \frac{ne}{2\epsilon_0} = \frac{\mathcal{J}}{2\epsilon_0 v},$$

где n — число электронов, приходящихся на единицу площади плоского потока, v — скорость электронов. Время, за которое ширина пучка увеличится в два раза, есть

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{4\epsilon_0 d v}{\mathcal{J}} \frac{m}{e}}.$$

Здесь a — поперечное ускорение электронов под действием кулоновских сил. Окончательно получим

$$x = vt = \left(\frac{2W}{m}\right)^{3/4} \left(\frac{4\epsilon_0 d}{\mathcal{J}} \frac{m}{e}\right)^{1/2} \approx 17 \text{ см.}$$

3.49. Раскручивание будет происходить при условии что частота переменного электрического поля совпадает с частотой вращения ионов N_2^+ в магнитном поле (условие синхронизма):

$$v_0 = \frac{eB}{2\pi m} \approx 170 \text{ кГц.}$$

В этом выражении $m = 28 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг — масса иона N_2^+ .

Для оценки изменения частоты необходимо найти сначала шаг спирали. Изменение скорости на соседних витках может быть оценено из второго закона Ньютона

$$m \Delta v \approx Ee \frac{T}{2},$$

где T — период обращения. Принимая во внимание, что $R = \frac{T}{2\pi} v$, получим

$$\Delta R = \frac{T}{2\pi} \Delta v \approx \frac{T^2}{4\pi} \frac{eE}{m}.$$

Условие синхронизма будет нарушено, если

$$\frac{\Delta v}{v_0} \gtrsim \frac{\Delta R}{R}.$$

Отсюда следует

$$\Delta\nu \approx \frac{E}{2RB} \approx 15 \text{ кГц.}$$

3.50. На каждый из зарядов диполя в направлении $[\mathbf{vB}]$ действует сила qvB . Уравнение малых колебаний диполя под действием этой силы имеет вид

$$I_0 \ddot{\varphi} + \rho v B \varphi = 0,$$

откуда для частоты колебаний получим:

$$\omega_0^2 = \frac{\rho v B}{I_0}.$$

$$3.51. \quad B(t) = -\frac{B_{\text{ср}}(t)}{2} + \text{const.}$$

$$3.52. \quad t = \frac{R^2}{2} \frac{\ln(R/r)}{\mu + U} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

$$3.53. \quad j_{\text{max}} \approx \frac{4\epsilon_0 \delta m}{e l^2} \left(\frac{2W}{m} \right)^{3/2} \approx 40 \text{ А/м}^2 = 4 \text{ мА/см}^2.$$

3.54 $B \leq \frac{(A_2 - A_1) m}{e \Delta} \sqrt{\frac{2W}{A_2 m}} \approx 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ Т} = 130 \text{ Гс,}$
где A_1 и A_2 — атомные номера изотопов урана U^{235} и U^{238} , m и e — масса и заряд протона. Время

$$t = \frac{Me}{mA_2 \mathcal{I}} = 8 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 2,5 \text{ года.}$$

$$3.55. \quad B \leq \frac{3b}{e l^2} \sqrt{\frac{mW}{2}} \approx 10^{-3} \text{ Т} = 10 \text{ Гс.}$$

3.56. Оценку легко выполнить для частиц, покидающих столб со среднеквадратичной скоростью $v = \sqrt{3kT/m}$, направленной перпендикулярно поверхности столба. Магнитное поле вблизи поверхности столба есть

$$B = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi R}.$$

В этом поле вылетевшая из столба частица будет двигаться по окружности, радиус которой определяется выражением

$$\frac{mv^2}{r} = evB.$$

В итоге получим

$$\mathcal{I} = \frac{2\pi R}{\mu_0 e r} \sqrt{3kTm} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ А.}$$

3.57. При отклонении частиц от горизонтальной плоскости возникает возвращающая (квазиупругая) сила, зависящая от компоненты магнитного поля B_r . Поскольку в зазоре магнита $B \sim H$ и $\text{rot } H = 0$, имеем

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r},$$

откуда при малых z следует

$$B_r = \frac{\partial B_z}{\partial r} z = -\frac{n}{r_0} B_z z.$$

Компонента силы Лоренца F_z запишется в виде

$$F_z = evB_r = -e\omega_0 n B_z z = -\omega_0^2 n m z,$$

где v — линейная скорость частицы на орбите, $\omega_0 = eB_z/m$ — угловая частота (циклотронная частота). Из уравнения вертикальных колебаний

$$m\ddot{z} = -n\omega_0^2 m z$$

следует

$$\omega_z = \omega_0 \sqrt{n}.$$

3.58. Равновесная орбита устойчива по отношению к малым радиальным отклонениям частицы, если сила Лоренца изменяется с изменением радиуса r медленнее, чем центробежная сила (рис. 72). При малых отклонениях $\rho = r - r_0$ можно записать

$$B_z(r) = B_z(r_0) + \frac{\partial B_z}{\partial r} (r - r_0) = B_z(r_0) - \frac{n}{r_0} B_z(r_0) \rho.$$

Радиальная компонента силы Лоренца имеет вид

$$\begin{aligned} F_{\text{Л}} &= evB_z(r) = e\omega r B_z(r) = e\omega_0 \frac{r_0^2}{r} B_z(r_0) \left(1 - \frac{n}{r_0} \rho\right) = \\ &= e\omega_0 r_0 B_z(r_0) \left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right) \left(1 - \frac{n}{r_0} \rho\right) \approx F_{\text{Л}}(r_0) - m\omega_0^2 (1+n) \rho. \end{aligned}$$

При написании этого выражения использован закон сохранения момента импульса: $\omega_0 r_0^2 = \omega r^2$, где $\omega_0 = eB_z(r_0)/m$ — угловая частота вращения частицы на равновесной орбите (циклотронная частота). Запишем теперь выражение для центробежной силы

$$F_{\text{цб}} = m\omega^2 r = \frac{m\omega_0^2 r_0^4}{r^3} \approx m\omega_0^2 r_0 \left(1 - 3\frac{\rho}{r_0}\right).$$

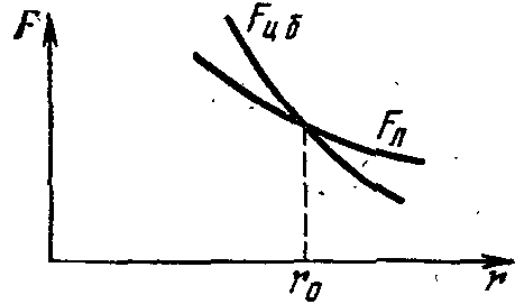


Рис. 72.

Уравнение радиальных колебаний частицы примет вид

$$m\ddot{\rho} = -m\omega_0^2(2-n)\rho.$$

Видно, что колебательный режим (устойчивость стационарной орбиты) возможен при $n < 2$. В этом случае

$$\omega_\rho = \omega_0 \sqrt{2-n}.$$

3.59. Из симметрии следует, что по поверхности шарика будут течь кольцевые токи, ориентированные перпендикулярно внешнему магнитному полю. Легко проверить, что поле этих токов вне шарика совпадает с полем диполя, помещенного в его центре. Поле магнитного диполя с дипольным моментом \mathbf{p}_m есть

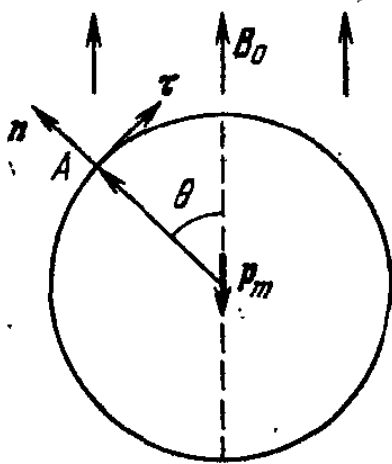


Рис. 73.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right].$$

Это поле совместно с однородным внешним полем \mathbf{B}_0 удовлетворяет граничному условию на поверхности сверхпроводящего шарика: $B_{0n} + B_n = 0$ (условие непрерывности нормальных компонент вектора индукции). Действительно, для любой точки A на поверхности шарика можно записать (рис. 73)

$$B_{0n} = B_0 \cos \theta, \quad B_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3p_m \cos \theta}{R^3} - \frac{p_m \cos \theta}{R^3} \right] = \frac{\mu_0 p_m \cos \theta}{2\pi R^3}.$$

При $\mathbf{p}_m = -\frac{2\pi}{\mu_0} R^3 \mathbf{B}_0$ граничное условие тождественно выполняется в любой точке поверхности шарика. Таким образом,

$$\mathbf{B}_0 + \mathbf{B} = \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \mathbf{B}_0 - \frac{3R^3 (\mathbf{B}_0 \mathbf{r}) \mathbf{r}}{2r^5}.$$

Поверхностную плотность тока i найдем из граничного условия для тангенциальных компонент напряженности магнитного поля: $H_{0\tau} + H_\tau = i$. Окончательно найдем

$$i(\theta) = \frac{3B_0 \sin \theta}{2\mu_0}.$$

3.60. В магнитном поле \mathbf{B}_0 каждый шарик приобретает магнитный момент

$$p_m = -\frac{2\pi}{\mu_0} R^3 B_0 = -2\pi R^3 H_0$$

(см. задачу 3.59). Магнитный момент единицы объема газа, состоящего из сверхпроводящих шариков, есть

$$I = n p_m = -2\pi n R^3 H_0.$$

Отсюда следует, что магнитная восприимчивость κ , определяемая в СИ выражением $I = \kappa \mu_0 H$, равна

$$\kappa = -\frac{2\pi}{\mu_0} n R^3.$$

Таким образом,

$$\mu = 1 + \kappa = 1 - \frac{2\pi}{\mu_0} n R^3 < 1.$$

«Идеальный газ» из сверхпроводящих шариков обладает диамагнитными свойствами. Условие $nR^3 \ll 1$ означает, что шарики находятся далеко друг от друга и их взаимодействием можно пренебречь.

3.61. При оценке будем полагать, что шарик находится в неоднородном поле, которое меняется от $B_{кр}$ до нуля на расстоянии порядка диаметра шарика. Тогда магнитный момент можно оценить по формуле

$$p_m \approx -\frac{2\pi}{\mu_0} R^3 B_{ср}, \text{ где } B_{ср} = \frac{B_{кр}}{2}$$

(см. задачу 3.59). Сила, действующая на шарик,

$$F_x = p_m \frac{\partial B_x}{\partial x} \approx -\frac{\pi}{2\mu_0} R^2 B_{кр}^2.$$

Сверхпроводящий шарик выталкивается из области сильного поля. Приравнивая эту силу весу шарика, найдем

$$R_{\max} \approx \frac{3B_{кр}^2}{8\mu_0 \rho g} \approx 1,7 \text{ см.}$$

3.62. На диполь, находящийся в магнитном поле, действует сила

$$F_x = p_m \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{2\pi B R^3}{\mu_0} \frac{\partial B_x}{\partial x}$$

(см. задачу 3.59).

Работа против этой силы

$$A = - \int_{-\infty}^0 F dx = \frac{2\pi R^3}{\mu_0} \int_0^{B_0} B dB = \frac{\pi B_0^2 R^3}{\mu_0}$$

равна начальной кинетической энергии шарика:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{\pi B_0^2 R^3}{\mu_0},$$

откуда

$$v_0 = B_0 \sqrt{\frac{2\pi R^3}{m\mu_0}} = 20 \text{ м/с.}$$

Таким образом, при начальной скорости $v_0 \geq 20$ м/с шарик влетит в соленоид.

3.63. При деформации сверхпроводящего соленоида магнитный поток сохраняется: $BSN = \text{const}$, где S — поперечное сечение соленоида, N — число витков. Магнитное давление на стенки соленоида определяется соотношением

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Отсюда получим

$$p_m S^2 = \text{const}.$$

3.64. Из теоремы о циркуляции магнитного поля имеем

$$n\mathcal{I}_0 = H_1 L + H_2 l,$$

где n — число витков, H_1 — поле в стали, H_2 — поле в зазоре. Граничные условия дают $\mu H_1 = H_2$. Отсюда

$$n\mathcal{I}_0 = H_2 (L/\mu + l).$$

Поскольку обмотка сверхпроводящая, $d\Phi/dt = 0$, т. е. магнитный поток сохраняется при любых изменениях в зазоре. Следовательно, при уменьшении зазора поле в нем не изменяется. Отсюда

$$n\mathcal{I} = H_2 \left(\frac{L}{\mu} + \frac{l}{2} \right),$$

где \mathcal{I} — новый ток в обмотке. Таким образом,

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \frac{1 + \frac{\mu}{2} \frac{l}{L}}{1 + \mu \frac{l}{L}}.$$

3.65. Внутри сверхпроводника магнитное поле равно нулю. Из граничных условий следует, что на его поверхности обращается в нуль нормальная компонента индукции магнитного поля. Для определения магнитного поля, создаваемого плоскостью, можно воспользоваться методом изображений — мысленно поместить под плоскостью на таком же расстоянии прямой ток, текущий в обратном направлении. Сила, действующая на единицу длины тока со стороны изображения, есть $F = \mathcal{I}B$, где B — магнитная индукция поля, создаваемого изображением. Эта сила направлена вверх. Условие, при котором проводник будет свободно висеть над плоскостью на расстоянии h , запишется в виде

$$F = \rho g, \quad \text{или} \quad \frac{\mu_0 \mathcal{I}^2}{2\pi \cdot 2h} = \rho g.$$

Отсюда следует, что

$$h = \frac{\mu_0 \mathcal{I}^2}{4\pi \rho g} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Отметим, что решение может быть легко обобщено на случай плоского витка любой формы, если только радиус кривизны витка во всех точках существенно превышает h .

3.66. Предположим, что размеры резонатора малы по сравнению с резонансной длиной волны. В этом случае резонансная частота может быть определена по формуле для квазистационарной цепи: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, где C — емкость плоского конденсатора в центральной части резонатора, а L — индуктивность тороидальной части:

$$C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{4d} \approx 7 \cdot 10^{-12} \text{ Ф.}$$

При подсчете L воспользуемся формулой $\Phi = L\mathcal{I}$. Индукция B магнитного поля в полости равна $\mu_0 \mathcal{I}/2\pi R$, где R — расстояние от центра резонатора:

$$\Phi = \int B dS = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \mathcal{I} \int_{a/2}^{3a/2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 a \ln 3}{2\pi} \mathcal{I} = L\mathcal{I}.$$

Следовательно,

$$L = \frac{\mu_0 a \ln 3}{2\pi} \approx 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ Г.}$$

Для резонансной частоты $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ получаем $\omega_0 = 2,5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega_0 \approx 1 \text{ м} \gg a$, т. е. предположение о том, что резонансная длина волны много больше размеров резонатора, оправдано.

$$3.67. \quad \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{2\Delta V}{U}} \approx 4,5 \cdot 10^{-6}.$$

$$3.68. \quad \Delta d = \frac{d}{Q} \sqrt{\frac{2\Delta V}{U}} \approx 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

$$3.69. \quad \mathcal{I} = \frac{\mathcal{E}_0}{2R} \cos 2\Omega t, \quad \mathcal{I}_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2(R+R_1)}.$$

$$3.70. \quad \mathcal{I} = \frac{\mathcal{E}_0}{2R}, \quad \mathcal{I}_1 = \frac{\mathcal{E}_0 \cos(2\Omega t + \varphi)}{2\sqrt{(R_1+R)^2 + (1/2 \omega C_1)^2}},$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{1}{(R_1+R) 2\Omega C_1}.$$

$$3.71. \quad \Omega RC = 1, \quad \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{1}{3}.$$

$$3.72. \quad q = \frac{q_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

$$3.73. \quad \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{ЭКВ}} C}}, \quad \text{где } L_{\text{ЭКВ}} = L_1 - M^2/L_2 - \text{ЭКВИ-}$$

валентная индуктивность контура с учетом влияния короткозамкнутой катушки.

IV. ОПТИКА

$$4.1. \quad D_{\kappa} = D \frac{b_1}{F_1}, \quad E = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{F_2}\right)^2 B.$$

$$4.2. \quad I = 2I_0 \left[1 - \frac{\sin 2\pi\psi (h/\lambda)}{2\pi\psi (h/\lambda)} \cos \frac{4\pi h\alpha}{\lambda} \right].$$

При $\psi = \frac{\lambda}{2h} m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) $I = 2I_0$.

4.3. 1) Порядок интерференции $m \approx 400$. 2) Ширина интерференционных полос $l = 2,8 \text{ см}$. 3) Допустимый размер источника $b \approx l = 2,8 \text{ см}$. 4) Немонохроматичность источника $\Delta\lambda \lesssim 14 \text{ \AA}$.

4.4. 1) $m_{\text{max}} \approx 500$, $m_{\text{min}} \approx 360$; 2) $\Delta\lambda \lesssim 5 \text{ \AA}$; 3) источник может иметь любые размеры.

$$4.5. \quad A = 1 + \frac{Dl}{Fd} = 5.$$

$$4.6. \quad \frac{\Delta l}{l} \approx \frac{2d\alpha \sqrt{n^2 - 1}}{\lambda} \approx 0,75.$$

$$4.7. \quad \Delta f \approx \frac{c(1-\rho)}{2\pi L} \approx 15 \text{ МГц}, \quad \Delta\nu = \frac{c}{2L} = 1500 \text{ МГц}.$$

4.8. Излучение источника белого света занимает широкий спектральный диапазон. Максимумы интенсивности при интерференции будут давать те спектральные компоненты, для которых выполнено условие $\Delta = m\lambda$, где m — целое число.

Аналогичным образом, те спектральные компоненты, для которых выполнено условие $\Delta = (m + 1/2)\lambda$, будут давать минимумы интенсивности. Таким образом, в результате интерференции на вход спектрального прибора будет поступать излучение, спектр которого имеет чередующиеся максимумы и минимумы. Расстояние между соседними спектральными максимумами может быть найдено из соотношения

$$(m + 1)\lambda_{m+1} = m\lambda_m, \text{ или } m(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = \lambda_{m+1},$$

$$\Delta\lambda = \lambda_m - \lambda_{m+1} = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{\Delta}.$$

Спектральный прибор должен иметь разрешающую силу, достаточную для обнаружения двух максимумов на расстоянии $\Delta\lambda$:

$$R \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m = \frac{\Delta}{\lambda} \approx 5 \cdot 10^8.$$

4.9. $\Delta = \frac{c}{\Delta\nu} = 30 \text{ м.}$

4.10. Электрон возбуждает в решетке тождественные возмущения, следующие друг за другом через время $\tau = d/v$. Запаздывание соседних возмущений в точке наблюдения, расположенной под углом θ , эквивалентно разности хода

$$\Delta = \tau c - d \sin \theta = d \left(\frac{c}{v} - \sin \theta \right).$$

Чтобы в направлении θ возмущения усиливали друг друга, необходимо

$$d \left(\frac{c}{v} - \sin \theta \right) = m\lambda,$$

где m — целое положительное число ($m > 0$, так как $c/v > 1$). Возможные значения m и λ должны удовлетворять соотношению

$$|\sin \theta| = \left| \frac{c}{v} - m \frac{\lambda}{d} \right| \leq 1.$$

4.11. Необходимо, чтобы в точке наблюдения выполнялось условие дифракции Фраунгофера. Размер зеркала должен быть значительно меньше размеров первой зоны Френеля:

$$\frac{d}{2} \ll r_1 = \sqrt{\lambda \frac{ab}{a+b}}.$$

Предполагая, что излучатель находится в фокусе параболического зеркала (т. е. $a = \infty$), получим

$$\frac{d}{2} \ll \sqrt{\lambda b}, \quad \text{или} \quad b \gg \frac{d^2}{4\lambda} \approx 10 \text{ м.}$$

4.12. $I = I_0/4.$

4.13. $\Delta v = \frac{\Omega l}{c} v$; эффект обусловлен изменением оптических длин путей для встречных волн.

4.14. $\tau \approx \frac{1}{2\pi\nu} \left(\frac{\lambda}{b} + \frac{b}{2L} \right) \approx 10^{-6} \text{ с.}$

4.15. $\frac{I}{I_0} \approx \left(\frac{D^2}{2\lambda F} \right)^2 \approx 1,5 \cdot 10^7, \quad d \approx \frac{2\lambda F}{D} \approx 10^{-3} \text{ см.}$

4.16. В первом случае в объектив телескопа попадает излучение с мощностью

$$P_1 = P_0 \left(\frac{D_1}{L_1} \right)^2.$$

Эта мощность распределяется по площади S_1 дифракционного пятна ($S_1 \approx \frac{\lambda^2}{D_1^2} F_1^2$) и создает освещенность

$$E_1 \approx \frac{P_0}{L_1^2} \frac{D_1^4}{\lambda^2 F_1^2}.$$

Освещенность фона в фокальной плоскости пропорциональна светосиле объектива:

$$E_1^0 = a \left(\frac{D_1}{F_1} \right)^2.$$

Таким образом, контраст изображения

$$\gamma_1 = \frac{E_1 + E_1^0}{E_1^0} = 1 + \frac{P_0 D_1^4 F_1^2}{L_1^2 \lambda^2 F_1^2 a D_1^2} = 1 + \frac{P_0}{a} \frac{D_1^2}{L_1^2 \lambda^2}.$$

При наблюдении в телескоп с объективом D_2

$$\gamma_2 = \frac{E_2 + E_2^0}{E_2^0} = 1 + \frac{P_0}{a} \frac{D_2^2}{L_2^2 \lambda^2}.$$

Следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2$ при условии

$$\frac{L_1^2}{D_1^2} = \frac{L_2^2}{D_2^2}, \quad \text{откуда} \quad L_2 = L_1 \frac{D_2}{D_1} = 5 \cdot 10^4 \text{ км.}$$

4.17. Угловая расходимость пучка света равна λ/D . Поэтому мощность излучения, рассеиваемая спутником:

$$P' = \rho P \frac{d^2}{4(\lambda L/D)^2} = \frac{\rho P}{4} \left(\frac{dD}{\lambda L} \right)^2.$$

Здесь L — расстояние до спутника. Так как спутник равномерно рассеивает оптическую мощность P' в телесный угол 2π , принимаемая мощность будет равна

$$P' \frac{\pi (D^2/4)}{2\pi L^2} = \frac{P'}{8} \left(\frac{D}{L} \right)^2.$$

Записывая теперь условие обнаружения рассеянного сигнала, получим

$$\frac{P'}{8} \left(\frac{D}{L} \right)^2 = \frac{\rho P}{32} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{D}{L} \right)^4 \geq P_{\text{пор}},$$

$$L \leq \frac{D}{2} \sqrt[4]{\frac{\rho P d^2}{2P_{\text{пор}} \lambda^2}} \approx 70 \text{ км.}$$

4.18. $L \leq \frac{dD}{2\lambda} \sqrt{\frac{P}{nh\nu}} \approx 5 \cdot 10^7 \text{ км.}$ Здесь h — постоянная Планка.

4.19. $l_{\text{min}} \approx 1 \text{ м.}$

4.20. Разрешающая способность объектива полностью используется при нормальном увеличении

$$\gamma_{\text{н}} = \frac{D}{d} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Отсюда

$$F_2 = \frac{d}{D} F_1 = 6 \text{ см.}$$

Угловое разрешение телескопа при визуальном наблюдении в $\gamma_{\text{н}}$ раз выше, чем у невооруженного глаза. Минимальное расстояние, на котором с помощью телескопа можно читать текст, определяется условием

$$\frac{l}{L} \geq \frac{\lambda}{D}.$$

Отсюда следует

$$L \leq \frac{D}{\lambda} l \approx 600 \text{ м.}$$

4.21. Предельному разрешению пятиметрового телескопа соответствует площадь поверхности Луны $S_0 \approx \pi (\lambda R/D)^2$, где R — расстояние до Луны. Это означает,

что освещенность любой точки изображения Луны в фокальной плоскости объектива телескопа создается за счет излучения всех элементов поверхности Луны, лежащих в пределах площади S_0 . Если часть этой площади будет закрыта черным (неотражающим) тентом, то освещенность изображения точки прилунения в фокусе телескопа изменится на величину, пропорциональную $S_0 - S$, где S — площадь круга. По условию

$$\frac{S_0 - S}{S_0} \lesssim 0,99.$$

Отсюда

$$r^2 \gtrsim 0,01 \left(\frac{\lambda}{D} R \right)^2, \text{ или } r \gtrsim 4 \text{ м.}$$

$$4.22. \quad D \approx \sqrt{\frac{\kappa \rho_1}{\rho_2} \frac{2\lambda L}{d}} \approx 6,5 \text{ м.}$$

4.23. Разрешаемый с помощью микроскопа минимальный размер объекта равен

$$l = \frac{0,61\lambda}{n \sin u},$$

где λ — длина волны, n — показатель преломления и u — угловая апертура.

Длина волны электрона

$$\lambda_э = \frac{h}{mv} = \frac{12,24}{\sqrt{U}} \text{ \AA}.$$

Здесь h — постоянная Планка. Ускоряющее напряжение U в этой формуле должно быть выражено в вольтах.

Условие равенства разрешающих способностей оптического и электронного микроскопов:

$$\frac{0,61\lambda_{\text{опт}}}{\sin u_{\text{опт}}} = \frac{0,61\lambda_э}{\sin u_э} = \frac{0,61 \cdot 12,24}{\sqrt{U} \sin u_э}.$$

Отсюда

$$U = \frac{12,24 \sin u_{\text{опт}}}{\lambda_{\text{опт}} \sin u_э} \approx 400 \text{ В.}$$

4.24. Распределение спектральной интенсивности \mathcal{I} в линии с доплеровским уширением подобно распределению частиц по скоростям:

$$\mathcal{I}(\lambda - \lambda_0) d\lambda = \alpha dn(v_x),$$

где $dn(\bar{v}_x) = A \exp\left[-\frac{mv_x^2}{2kT}\right] dv_x$, а λ_0 — длина волны излучения неподвижного атома. Принимая во внимание, что $\lambda - \lambda_0 = \lambda_0 (v_x/c)$ (доплеровское смещение), можно записать

$$\mathcal{I}(\lambda - \lambda_0) d\lambda = \\ = \alpha A \exp\left[-\frac{mc^2(\lambda - \lambda_0)^2}{2kT\lambda_0^2}\right] \frac{c}{\lambda_0} d\lambda = B \exp\left[-\frac{mc^2(\lambda - \lambda_0)^2}{2kT\lambda_0^2}\right] d\lambda.$$

Полуширина линии определяется из условия

$$\mathcal{I}(\lambda_n - \lambda_0) = \frac{1}{2} \mathcal{I}(0).$$

Отсюда для ширины линии $2(\lambda_n - \lambda_0)$ можно получить

$$2(\lambda_n - \lambda_0) = 2 \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} \ln 2}.$$

Спектральный прибор должен обладать разрешающей силой

$$R \geq \frac{\lambda_0}{2(\lambda_n - \lambda_0)} = \frac{c}{2 \sqrt{\frac{2kT}{m} \ln 2}} \approx 10^5.$$

При работе в первом порядке

$$R = N = \frac{L}{d},$$

где L — размер дифракционной решетки. Таким образом,

$$L = Rd \geq 10 \text{ см.}$$

4.25. Для надежного обнаружения движения космического корабля по доплеровскому сдвигу спектральных линий необходимо, чтобы этот сдвиг превосходил ширину спектральной линии, обусловленную тепловым движением молекул на поверхности Солнца (т. е. чтобы линейная скорость корабля превосходила среднеквадратичную скорость молекул водорода, равную при температуре $T = 6000 \text{ К}$ $v_T \approx 10^4 \text{ м/с}$). Отсюда следует, что $v \geq v_T \approx 10^4 \text{ м/с}$. Минимальное число штрихов дифракционной решетки определяется соотношением

$$R = mN \geq \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx \frac{c}{v}.$$

При $m = 2$ получим $N \geq 1,5 \cdot 10^4$.

4.26. Для надежного обнаружения расщепления линии $\delta\lambda$ в спектре излучения двойной звезды, обусловленного эффектом Доплера, необходимо, чтобы это расщепление превосходило ширину спектральных линий, обусловленную тепловым движением молекул. Это условие будет выполнено, если линейная скорость звезд будет превосходить среднеквадратичную скорость движения молекул на их поверхности.

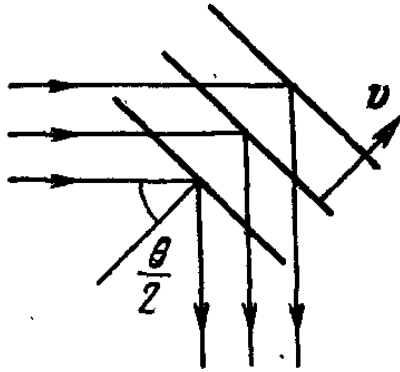


Рис. 74.

При $\tau = 10$ сут это условие выполняется:

$$R = mN \gtrsim \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx \frac{c}{2v}, \quad N \gtrsim 10^3.$$

При $\tau = 10$ годам расщепление линий значительно меньше их ширины.

4.27. Интерференционное отражение света происходит только от тех звуковых волн, для которых выполнено условие Брегга — Вульфа (рис. 74). Доплеровский сдвиг частоты рассеянного света определяется соотношением

$$\Delta\nu = 2\nu \frac{v}{c/n} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Условие разрешения:

$$R = mN \gtrsim \frac{\nu}{\Delta\nu}.$$

Отсюда при $m = 1$ получим

$$N \gtrsim \frac{c}{2\nu n \sin(\theta/2)} \approx 1,2 \cdot 10^5.$$

$$4.28. \quad N \gtrsim \frac{\alpha}{4} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \approx 2,5 \cdot 10^5.$$

4.29. Разрешающая способность R интерферометра Фабри — Перо может быть оценена из следующих соображений. Минимальная разность хода между лучами, участвующими в образовании интерференционной картины в интерферометре Фабри — Перо, равна $2L$. Следовательно, порядок интерференции $m = 2L/\lambda$. Эффективное число лучей на выходе интерферометра есть $N \approx \approx 1/(1 - \rho)$. Проводя аналогию с дифракционной решеткой, запишем

$$R = \frac{\omega}{\Delta\omega} = mN \approx \frac{2L}{\lambda} \frac{1}{1 - \rho} = \frac{\omega L}{c(1 - \rho)}.$$

Отсюда

$$\Delta\omega \approx \frac{c(1-\rho)}{L}.$$

Так как $\omega = \omega_{\text{ИК}} + \omega_{\text{л}}$, где $\omega_{\text{л}} = \text{const}$ — частота лазерного излучения, $\omega_{\text{ИК}}$ — частота исследуемого источника в ИК-диапазоне, можно записать $\Delta\omega = \Delta\omega_{\text{ИК}}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} R_{\text{ИК}} &= \frac{\omega_{\text{ИК}}}{\Delta\omega_{\text{ИК}}} = \frac{\omega_{\text{ИК}}}{\Delta\omega} = \frac{\omega_{\text{ИК}}}{\omega} R \approx \frac{\omega_{\text{ИК}} L}{c(1-\rho)} = \\ &= \frac{2\pi L}{\lambda_{\text{ИК}}(1-\rho)} \approx 2 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

4.30. Линейно поляризованный свет не переносит момента импульса. Если одно из главных направлений четвертьволновой пластинки совпадает с направлением поляризации падающего света, то прошедший свет также будет линейно поляризованным и пластинка не будет испытывать крутящего момента. При повороте главных направлений пластинки на $\pm 45^\circ$ относительно плоскости поляризации падающего света прошедший свет будет поляризован по кругу с правым или левым вращением. В этом случае прошедший через пластинку свет будет переносить за единицу времени момент импульса $L = \pm hn$, где n — число фотонов, пронизывающих пластинку за секунду. Пластинка будет испытывать противоположно направленный момент импульса отдачи

$$M = -L = \pm hn = \pm h \frac{P}{h\nu} = \pm \frac{P}{\nu},$$

где P — мощность проходящего света, а ν — его частота. Подставляя в это выражение числовые значения P и ν , получим

$$M = 6,28 \cdot 10^{-15} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

4.31. z — оптическая ось. $n_o = \sqrt{\frac{\epsilon_1 d_o + \epsilon d}{d + d_o}}$, $n_e =$
 $= \sqrt{\epsilon \epsilon_1 \frac{d + d_o}{d_o \epsilon + d \epsilon_1}}.$

4.32. $A = \frac{A_0}{2^N} \left| \frac{\sin(2^N \varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \right|$, где $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_e - n_o)$. Та-

кая система является интерференционно-поляризованным фильтром и действует аналогично дифракционной решетке.

4.33. Показатель преломления газа определяется соотношением

$$n = \sqrt{1 + 4\pi\alpha N},$$

где α — поляризуемость молекул газа (в гауссовой системе), а N — их концентрация. Принимая во внимание, что

$$N(h) = \frac{p_0}{kT} \exp\left[-\frac{mg_B h}{kT}\right],$$

где p_0/kT — концентрация молекул при $h=0$, получим

$$n = \sqrt{1 + 4\pi\alpha \frac{p_0}{kT} \exp\left[-\frac{mg_B h}{kT}\right]} \approx 1 + 2\pi\alpha \frac{p_0}{kT} \left(1 - \frac{mg_B h}{kT}\right).$$

Радиус кривизны луча, пущенного горизонтально вблизи поверхности планеты, есть

$$R = \frac{n}{dn/dh} \approx -\frac{(kT)^2}{2\pi\alpha p_0 mg_B} \approx -10^2 \text{ км.}$$

Так как $R < 0$, центр кривизны располагается при $h < 0$. Таким образом, горизонтальные и близкие к ним лучи не могут выйти за пределы атмосферы Венеры ($|R| < R_B$). В атмосфере Венеры возможна круговая рефракция, при которой луч света огибает планету на некоторой высоте.

4.34. Рефракция горизонтального луча описывается формулой

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dh}.$$

Здесь R — радиус кривизны луча, n — показатель преломления газа, определяемый выражением

$$n - 1 = (n_0 - 1) \exp\left[-\frac{mgh}{kT}\right] \approx (n_0 - 1) \left(1 - \frac{mgh}{kT}\right).$$

Последнее выражение справедливо при малых значениях высоты ($mgh/kT \ll 1$). Принимая во внимание, что $(n - 1) \ll 1$, получим

$$\frac{1}{R} = - (n_0 - 1) \frac{mg}{kT}, \quad R = -\frac{1}{n_0 - 1} \frac{kT}{mg} \approx -2,9 \cdot 10^4 \text{ км.}$$

Отрицательное значение R указывает на то, что центр кривизны луча располагается при $h < 0$.

При круговой рефракции радиус кривизны луча равен радиусу Земли $R_3 = 6,4 \cdot 10^3$ км. Поскольку $R \sim \frac{1}{n_0 - 1} \sim \frac{1}{\rho_0}$, давление (и плотность) атмосферы должно быть увеличено в $|R|/R_3 = 4,5$ раза.

4.35. В линзу, а следовательно, и на шарик направляется мощность излучения, равная $\beta \frac{\pi D^2}{4}$, где D — диаметр объектива. Радиус шарика равен радиусу изображения Солнца $\alpha F/2$, где F — фокусное расстояние линзы. Шарик излучает мощность, равную $\sigma T^4 \cdot 4\pi \frac{\alpha^2 F^2}{4}$ ($\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) — постоянная Стефана — Больцмана).

Установившуюся температуру T можно найти из уравнения баланса энергий:

$$\beta \frac{\pi D^2}{4} = \sigma T^4 \cdot 4\pi \frac{\alpha^2 F^2}{4}.$$

Отсюда

$$T = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4\sigma\alpha^2} \left(\frac{D}{F}\right)^2} \approx 1,7 \cdot 10^3 \text{ К.}$$

4.36. Электрический пробой наступит в том случае, когда электрон в результате действия на него электрического поля световой волны приобретет энергию $10 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-18}$ Дж. Эта энергия значительно меньше энергии покоя электрона $m_0 c^2 \approx 10^{-13}$ Дж, т. е. скорость электрона v при пробое много меньше c . За один период колебания электрон смещается на расстояние порядка v/ν , где ν — частота света. Это значительно меньше длины волны света $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см и длины свободного пробега электрона $\Lambda = 10^{-4}$ см.

Таким образом, целесообразно рассмотреть действие световой волны на свободный электрон:

$$m\ddot{x} = -eE_0 \cos \omega t,$$

где E_0 — амплитуда световой волны. Интегрируя, получаем выражение для скорости электрона: $v = -\frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t$.

Максимальная кинетическая энергия электрона равна

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{eE_0}{m\omega}\right)^2 = eU.$$

Отсюда

$$E_0^2 = \frac{2U m \omega^2}{e}.$$

Плотность потока мощности излучения в луче равна

$$\frac{P}{S} = c \epsilon_0 E_{\text{ср}}^2,$$

где $S = \frac{\pi}{4} D^2$, $E_{\text{ср}}^2 = E_0^2/2$. Окончательно получаем

$$P = c \epsilon_0 S \frac{E_0^2}{2} = \frac{c \epsilon_0 S U m \omega^2}{e} \approx 2 \cdot 10^{12} \text{ Вт.}$$

4.37. Принимая во внимание, что при скользящих углах падения $\varphi \approx 4\alpha$, получим из условия полного внутреннего отражения:

$$\cos \alpha = \cos \frac{\varphi}{4} = n = 1 - \frac{\varphi^2}{32}.$$

Показатель преломления есть

$$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 - \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m \omega^2}} \approx 1 - \frac{e^2 N}{2 \epsilon_0 m \omega^2}.$$

Для Be $Z = 4$, $A = 9$, $N = Z N_{\text{Ав}} / A$ ($N_{\text{А}}$ — число Авогадро). Отсюда

$$\varphi \approx \sqrt{32 \frac{\lambda^2 e^2 Z N_{\text{Ав}}}{\epsilon_0 m c^2 8 \pi^2 A}} \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ рад} \approx 2,9^\circ.$$

4.38. Фотону с энергией, равной 5 эВ, соответствует длина волны $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$ см. Граница прозрачности определится из условия

$$\epsilon = 1 - \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m \omega^2} = 0.$$

Отсюда

$$N = \frac{\epsilon_0 m \omega^2}{e^2} = \frac{4 \pi^2 \epsilon_0 c^2 m}{\lambda^2 e^2} \approx 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Концентрация атомов в серебре

$$n = \frac{N_{\text{Ав}}}{A} \approx 6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Здесь $N_{\text{А}}$ — число Авогадро. Таким образом,

$$\frac{N}{n} \approx \frac{1}{6}.$$

4.39. Диэлектрическая проницаемость ϵ плазмы определяется выражением

$$\epsilon = n^2 = 1 - \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m \omega^2},$$

где e и m — заряд и масса электрона, N — концентрация. Отсюда

$$N = \frac{(1 - n^2) m \omega^2 \epsilon_0}{e^2} \approx 2,4 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}.$$

Найдем теперь фазовую скорость радиоволн:

$$v = \frac{c}{n} \approx 3,32 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Для определения групповой скорости u нужно знать зависимость $v(\lambda)$. Эта зависимость легко может быть установлена из выражения для n^2 , если принять во внимание, что $n = c/v$, $\omega = 2\pi v/\lambda$:

$$v = \sqrt{c^2 + \frac{N e^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m} \lambda^2}.$$

Используя соотношение Рэлея

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda},$$

получим

$$u = \frac{c^2}{v} = cn \approx 2,7 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

4.40. Диаметр пятна в фокусе порядка

$$\frac{\lambda}{D} F \approx \lambda.$$

Ускорение электрона обусловлено электрическим полем E . Конечная скорость электрона найдется из условия

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2m_0 c^2, \text{ откуда } \beta^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, средняя скорость электрона близка к $c/2$. Поскольку ускорение происходит в течение времени порядка $T/4$, пройденный путь будет порядка $\frac{c}{2} \frac{T}{4} = \frac{\lambda}{8}$, т. е. меньше размера фокуса.

Оценим теперь ускоряющее поле E :

$$\frac{4c}{T} = \frac{4c^2}{\lambda} \approx \frac{eE}{m_0}, \quad E \approx \frac{4m_0c^2}{\lambda e}.$$

Мощность лазера P есть

$$P \approx (\varepsilon_0 E^2) c \lambda^2 = \frac{16\varepsilon_0 m_0^2 c^5}{e^2} \approx 10^{10} \text{ Вт.}$$

4.41. Перейдем в систему, в которой спутник покоится. Частота приходящего на спутник сигнала равна

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha}.$$

Такую же частоту в системе, связанной со спутником, будет иметь отраженный сигнал. Перейдя теперь снова к системе, связанной с Землей, обнаружим в точке B сигнал с частотой

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} = \omega_0 \frac{1 - v^2/c^2}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha\right) \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}.$$

Релятивистская поправка к частоте есть

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_{\text{рел}} \approx \frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-9}.$$

Отсюда следует, что разрешающая способность R спектрального прибора должна быть

$$R \gtrsim \left(\frac{\omega_0}{\Delta\omega}\right)_{\text{рел}} \approx 10^9.$$

4.42. Поправки, обусловленные теорией относительности, составляют $(v/c)^2$ часть от измеряемых величин. Коэффициент преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ для плазмы отличен от единицы на величину

$$\Delta n = \sqrt{\varepsilon} - 1 \approx \frac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m \omega^2},$$

где e и m — заряд и масса электрона. Поскольку состояние ионосферы (плотность электронов) меняется неконтролируемым образом, для надежного обнаружения эффектов, предсказываемых теорией относительности, ошиб-

ка измерения параметров орбиты не должна превышать Δn . Таким образом,

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \geq \Delta n \approx \frac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m \omega^2}.$$

Отсюда

$$v = \frac{\omega}{2\pi} \geq \frac{ec}{2\pi v} \sqrt{\frac{N}{2\varepsilon_0 m}} \approx 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Гц.}$$

4.43. $v = \frac{3}{5} c.$

4.44. $\Delta t = 3 \cdot 10^{-5} \text{ с, } \delta(\Delta t)/\Delta t \approx 0,06\%.$

V. АТОМНАЯ ФИЗИКА

5.1. Законы сохранения энергии-импульса для комптоновского рассеяния γ -кванта на угол 180° дают

$$\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad \frac{\hbar\omega}{c} = -\frac{\hbar\omega'}{c} + p,$$

где p — импульс электрона, а $\hbar\omega$ и $\hbar\omega'$ — энергии γ -кванта до и после рассеяния. При условии $E \gg mc^2$ импульс $p \gg mc$. Из полученных уравнений следует, что $\hbar\omega' \approx mc^2/2 = 0,25 \text{ МэВ}$.

5.2. Обозначим полную энергию, импульс и угол вылета электрона отдачи E , p и φ соответственно. Запишем законы сохранения для комптоновского рассеяния с учетом условий задачи:

$$\hbar\omega + mc^2 = \frac{\hbar\omega}{2} + E, \quad \frac{\hbar\omega}{c} = p \cos \varphi, \quad \frac{\hbar\omega}{2c} = p \sin \varphi$$

и соотношение $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$.

Разрешая эту систему уравнений, получим $\hbar\omega = mc^2 = 0,5 \text{ МэВ}$, откуда $\lambda \approx 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ см}$.

5.3. Разрешающая способность спектрографа

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm,$$

где N — число отражающих слоев, m — порядок интерференции. По формуле Вульфа — Брэгга

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = \frac{2d \sin \theta}{\lambda}.$$

Здесь d — постоянная кристаллической решетки. Изменение длины волны определяется формулой Комптона

$$\delta\lambda = 2\pi\Lambda (1 - \cos \varphi),$$

где $\Lambda = \hbar/mc = 3,9 \cdot 10^{-11}$ см — комptonовская длина. Таким образом,

$$R = Nm = \frac{D}{d} \frac{2d \sin \theta}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi\Lambda(1 - \cos \varphi)}.$$

Отсюда

$$D = \frac{\lambda^2}{4\pi\Lambda \sin \theta (1 - \cos \varphi)}.$$

Подставляя числовые значения, получим $D = 20 \text{ \AA}$.

5.4. Обозначим начальную энергию фотона $\hbar\omega$, конечную — $\hbar\omega'$, угол рассеяния фотона θ , кинетическую энергию электрона E_k , импульс p , угол вылета электрона φ . Запишем закон сохранения энергии и импульса:

$$\hbar\omega = \hbar\omega' + E_k, \quad \frac{\hbar\omega'}{c} \sin \theta = p \sin \varphi, \quad \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{\hbar\omega'}{c} \cos \theta + p \cos \varphi.$$

Отсюда найдем

$$\left(\frac{\hbar\omega'}{c}\right)^2 = \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 + p^2 - \frac{2\hbar\omega}{c} p \cos \varphi$$

и

$$\hbar\omega' = \frac{p^2 c^2 + E_k^2 - 2pcE_k \cos \varphi}{2(pc \cos \varphi - E_k)}, \quad \text{если } (pc \cos \varphi - E_k) > 0.$$

Окончательно

$$\cos \varphi > \left(\frac{E_k}{pc}\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{mc^2}{pc}\right)^2} - \frac{mc^2}{pc}.$$

5.5. Пусть фотон с импульсом $p = \hbar\omega/c$ и массой $m = p/c$ летит вдоль оси z (рис. 75). Изменение поперечного импульса фотона Δp_x есть

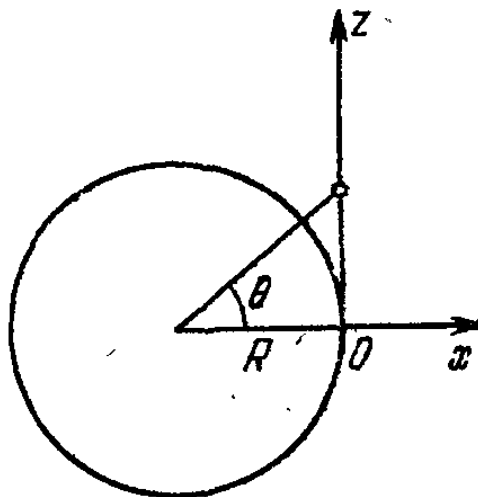


Рис. 75.

$$\begin{aligned} \Delta p_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_x dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma M_C m}{R_C^2 + z^2} \cos \theta dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma M_C m R}{(R_C^2 + c^2 t^2)^{3/2}} dt = \frac{2\gamma M_C m}{R_C c}. \end{aligned}$$

Угол, на который отклонится фотон, можно оценить из соотношения

$$\sin \varphi \approx \frac{\Delta p_x}{p_x} = \frac{2\gamma M_C}{R_C c^2} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

5.6. Условие отражения m -го порядка в системе, связанной с кристаллом, запишется в виде

$$2d \sin \varphi = m\lambda = m \frac{h}{Mv},$$

где h — постоянная Планка, M — масса нейтрона, v — скорость нейтронов относительно кристалла. В первом случае источник нейтронов неподвижен, а во втором — движется со скоростью u . Поэтому

$$\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} = \frac{|v+u|}{|v|}.$$

В дальнейшем будем полагать, что $u \ll v$. В этом случае имеем приближенно

$$\frac{|u+v|}{|v|} \approx 1 + \frac{u}{v} \sin \varphi_0$$

и, следовательно,

$$\sin \varphi \approx \left(1 + \frac{u}{v} \sin \varphi_0\right) \sin \varphi_0.$$

5.7. Длина волны де-Бройля нейтрона

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{ht}{mL} = \frac{h\varphi}{mL\omega} = \frac{\hbar\varphi}{mLv} \approx 6\text{Å} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{b}{R\varphi} = 0,2.$$

5.8. $D = \left(\frac{\hbar L}{\sqrt{3mkT}}\right)^{1/2} \approx 2$ мкм, где m — масса атомов

серебра, k — постоянная Больцмана.

5.9. Энергия на n -м уровне $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} n^2$. На каждом уровне находятся два электрона. Поэтому полная энергия всех электронов

$$E = 2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} \sum_{n=1}^{N/2} n^2$$

и сила

$$F = \frac{\partial E}{\partial b} = - \frac{2\pi^2 \hbar^2}{mb^3} \sum_{n=1}^{N/2} n^2.$$

5.10. Из соотношения неопределенности, полагая $\Delta p \approx p$ и $\Delta r \approx r$, получим

$$p = \frac{\hbar}{r}, \quad E_k = \frac{p^2}{2m} \approx 0,2 \text{ МэВ.}$$

5.11. Можно ожидать, что кванты поля испускаются нуклонами виртуально на время t , допускаемое соотношением неопределенности $t \sim \hbar/mc^2$. За это время кванты успеют уйти от нуклона на расстояние $r \sim ct \approx \hbar/mc \approx 2 \cdot 10^{-13}$ см.

5.12. Угол φ между направлением полета частиц и направлением излучения определяется из равенства

$$\cos \varphi = \frac{c}{nv}.$$

Электрон, находясь в слое вещества толщиной d , имеет неопределенность импульса $\Delta p \approx \hbar/d$ и неопределенность скорости $\Delta v = \hbar/dm$, где m — масса электрона. Связанная с этим неопределенность угла φ равна

$$\Delta \varphi \approx \frac{ch}{md nv^2 \sin \varphi}.$$

5.13. $E_n = U + n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2}$; при $n = 1$ $E_1 \approx 35$ эВ.

5.14. Ионизационный потенциал равен $I = \frac{me^4}{2\hbar^2}$, где $m = \frac{m_e}{1 + m_p/M}$ — приведенная масса. Для позитрония $M = m_p$ и $I = 6,8$ эВ. Для мюония $I = 13,5$ эВ.

5.15. Положение термов определяется формулой

$$E_n = -\frac{1}{2} \mu c^2 \cdot \alpha^2 \frac{1}{n^2} = A \frac{1}{n^2}, \quad (1)$$

где приведенная масса μ определяется соотношением

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_\mu} \quad (2)$$

и α — постоянная тонкой структуры, равная $1/137$. Энергия перехода

$$\Delta E = A \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (3)$$

где для $M-N$ -перехода n_1 и n_2 равны 2 и 3. Окончательно из (1) — (3) получим $\Delta E = 124$ эВ.

5.16. Среднее значение потенциальной энергии электрона в момент распада мезона найдем из соотношения

$$\langle E_{\text{п}} \rangle = \frac{1}{8\pi r_1^3} \int_0^\infty e^{-r/r_1} \left(1 - \frac{r}{2r_1}\right)^2 \left(-\frac{e^2}{r}\right)^2 4\pi r^2 dr = -\frac{e^2}{4r_1}.$$

Средняя кинетическая энергия

$$\langle E_k \rangle = E - \langle E_n \rangle = -\frac{e^2}{8r_1} + \frac{e^2}{4r_1} = \frac{e^2}{4r_1} \approx 4 \text{ эВ.}$$

5.17. Вероятность найти мюон на расстоянии r от центра ядра

$$\omega(r) = \frac{4\pi r^2}{\pi r_1^3} e^{-2r/r_1} dr.$$

Поправка к энергии

$$\Delta E = \int_0^{r_я} \frac{ze^2}{r} \frac{4r^2}{r_1^3} e^{-2r/r_1} dr = \frac{ze^2}{r_1} \left[1 - \left(1 + \frac{2r_я}{r_1} \right) e^{-2r_я/r_1} \right].$$

Поскольку

$$r_я = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \approx 3,5 \cdot 10^{-13} \text{ см,}$$
$$r_1 = \frac{\hbar^2}{Zm_{\text{мюон}}e^2} \approx 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ см,}$$

то $r_1 \gg r_я$ и

$$\Delta E \approx \frac{Ze^2}{r_1} \left(\frac{2r_я}{r_1} \right)^2.$$

Так как

$$\langle E \rangle = 2 \langle E_n \rangle = \frac{2ze^2}{r_1},$$

где E_n — потенциальная энергия.

Окончательно получим

$$\frac{\Delta E}{E} \approx 2 \left(\frac{r_я}{r_1} \right)^2 \approx 4 \cdot 10^{-2}.$$

5.18. Для оценки положим, что начальный импульс электрона p_0 был направлен перпендикулярно линии полета фотона. Величину p_0 найдем из условия

$$p_0 r \sim \hbar. \quad (1)$$

Продольный импульс p_e электрона после соударения с фотоном найдем из закона сохранения импульса:

$$\frac{\hbar\omega}{c} = \frac{\hbar\omega'}{c} + p_e, \quad (2)$$

а $\Delta\omega$ из формулы Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2\pi\Lambda (1 - \cos \varphi), \quad (3)$$

где $\Lambda = 3,9 \cdot 10^{-11}$ см — комптоновская длина волны. В нашем случае

$$\Delta\lambda = 4\lambda\Lambda. \quad (4)$$

Используя (2) и (4), легко убедиться, что электрон в данной задаче нерелятивистский. Оценим теперь разброс в угле рассеяния электрона (рис. 76):

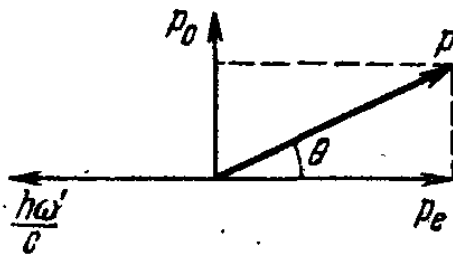


Рис. 76.

$$\operatorname{tg} \theta = p_0/p_e \approx 0,14, \text{ или } \theta \approx 10^\circ.$$

5.19. Изменение интенсивности со временем t :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 e^{-t/\tau}, \quad (1)$$

где τ — среднее время жизни атома, а $t = x/v$. Логарифмируя (1), получим

$$\ln \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}_1} = - \frac{x}{v\tau}.$$

Из графика на рис. 49 находим $1/v\tau = 1$ см⁻¹, откуда $\tau = 10^{-8}$ с. Неопределенность в энергии, определяемая естественной шириной линии:

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau} = 10^{-7} \text{ эВ.}$$

5.20. При излучении γ -кванта пылинка приобретает импульс отдачи $Mv = E/c$, где E — энергия γ -кванта. Доплеровское смещение частоты γ -кванта вследствие движения излучателя (пылинки) определяется равенством

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c}. \quad (2)$$

Из соотношения неопределенности найдем естественную ширину спектральной линии:

$$\Delta\omega \approx \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{2\pi}{\tau}. \quad (3)$$

Используя (2) — (3), найдем минимальную массу пылинки, при которой еще наблюдается эффект Мёссбауэра:

$$M = \frac{E}{vc} = \frac{E^2\tau}{2\pi c^2\hbar} \approx 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ кг.}$$

Радиус пылинки оценим в предположении, что пылинка имеет сферическую форму с плотностью $\rho = 8 \text{ г/см}^3$:

$$r = \left(\frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{1/3} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

5.21. Изменение энергии γ -кванта при его перемещении на расстояние H против действия силы гравитации равно

$$\Delta E = mgH = \frac{E}{c^2} gH.$$

По условию задачи $\Delta E = 10\Gamma = 10h/\tau$, где Γ — ширина линии резонансного поглощения. Окончательно $H = \frac{10hc^2}{\tau g E} \approx 400 \text{ м.}$

5.22. Вращательные уровни имеют энергию

$$E_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1).$$

Для каждого из трех уровней запишем

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1), \quad E_2 = \frac{\hbar^2}{2I} (l+1)(l+2),$$

$$E_3 = \frac{\hbar^2}{2I} (l+2)(l+3),$$

откуда найдем

$$\Delta E_{1,2} = E_2 - E_1 = \frac{\hbar^2}{I} (l+1) = 10^{-4} \text{ эВ,}$$

$$\Delta E_{2,3} = E_3 - E_2 = \frac{\hbar^2}{I} (l+2) = 2 \cdot 10^{-4} \text{ эВ,}$$

или

$$\frac{l+2}{l+1} = 2,$$

откуда следует, что $l=0$ и указанным трем уровням соответствуют $l=0, 1$ и 2 . Величина

$$I = \frac{\hbar^2 (l+1)}{\Delta E_{1,2}} = 7 \cdot 10^{-46} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

5.23. Расщепление пучка нейтронов в однородном магнитном поле обусловлено переориентацией спинов нейтронов по полю и против поля. Изменение энергии нейтрона при пересечении границы магнитного поля $\Delta E_k = \pm \mu B$, где знак «+» соответствует случаю, когда

спин нейтрона параллелен полю, «—» — антипараллелен, а μ — проекция магнитного момента на направление поля, равная магнетону Бора μ_B . Кинетическая энергия связана с длиной волны де-Бройля λ соотношением $E_k = 2\pi^2\hbar^2/m\lambda^2$. Показатель преломления равен

$$n_{\pm} = \left\{ 1 \pm \frac{\mu_B}{E_k} \right\}^{1/2} \approx 1 \pm \frac{\mu_B}{2E_k}.$$

Для углов преломления на границе можно записать

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sin \varphi} = \frac{1}{n_{\pm}}.$$

Для малого угла расщепления $\theta = \varphi_+ - \varphi_-$ имеем окончательно

$$\theta \approx \frac{\sin 60^\circ}{\cos \varphi} (n_+ - n_-) = \frac{\mu_B}{E_k} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{m\lambda^2 \mu_B}{2\pi^2\hbar^2} \sqrt{3} \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ рад}$$

(φ — средний угол преломления, т. е. $\approx 60^\circ$).

5.24. Атомы Na при заданной температуре находятся в основном $^2S_{1/2}$ -состоянии. Проекция магнитного момента атома на направление поля

$$\mu_H = m_l g \mu_B = \mu_B,$$

так как $m_l = \pm 1/2$, $g = 2$ (фактор Ланде), μ_B — магнетон Бора. Сила, расщепляющая пучок атомов, летящих вдоль оси y :

$$F_x = \pm \mu_B \frac{dB}{dx},$$

за время $t = l/v$ сообщит атомам скорость

$$v_x = \pm \mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l}{vM},$$

приводящую к смещению пучков на детекторе

$$x' = \pm \mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l(L+l/2)}{Mv^2}.$$

Кинетическая энергия атомов равна

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Расстояние между пятнами на экране

$$\Delta = 2x' = 2\mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l(L+l/2)}{3kT} \approx 2 \text{ см.}$$

5.25. Как и в предыдущей задаче, сила, отклоняющая атомы Li:

$$F = ma = \mu_B \frac{dB}{dx},$$

где a — ускорение, перпендикулярное направлению скорости $v = \sqrt{2E_k/m}$. Отклонение атомов на экране за время пролета магнита $t_1 = L_1/v$ и отрезка между магнитом и экраном $t_2 = L_2/v$ равно

$$\Delta = a \frac{t_1^2}{2} + at_1 t_2 = at_1 \left(\frac{t_1}{2} + t_2 \right),$$

а расстояние между двумя пучками на экране равно 2Δ . Геометрический размер изображения каждого из пучков равен $D_{\text{из}} = D \frac{L_1 + L_2 + L/2}{L/2}$. Из условия $D_{\text{из}} < \Delta$ и при $L_2 \gg L$ и L_1 окончательно получим

$$D < \frac{\mu_B dB/dx}{2E_k} LL_1 \approx 0,9 \text{ см.}$$

5.26. Разрешающая способность интерферометра

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN,$$

где $m = 2L/\lambda$. Таким образом,

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2LN}{\lambda},$$

откуда

$$L = \frac{\lambda^2}{2N \Delta\lambda}.$$

Переходя от длины волны λ к круговой частоте $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ и $\Delta\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \Delta\lambda$, получим $L = \frac{\pi c}{N \Delta\omega}$. Расщепление Зеемана

$$\Delta\omega = \frac{eB}{2mc} = \frac{\mu_B B}{\hbar}.$$

Окончательно получим

$$L = \frac{2\pi\hbar c^2}{NeB} \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

5.27. Зеемановское расщепление должно быть больше доплеровского уширения за счет теплового движения

атомов (в основном водорода) и вращения звезды, т. е.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{2\mu_B B}{\hbar\omega_0} \geq \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{\text{тепл}} + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{\text{вращ}} = \frac{v_{\text{тепл}}}{c} + \frac{v_{\text{вращ}}}{c} \approx \frac{v_{\text{тепл}}}{c}.$$

Окончательно

$$B \geq \frac{\hbar\omega_0}{2\mu_B c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \approx 0,18 \text{ Т.}$$

5.28. Величина расщепления в магнитном поле

$$\Delta\lambda \approx \frac{\Delta E \lambda^2}{2\pi c \hbar} \approx 0,3 \text{ \AA},$$

где $\Delta E \approx \mu_B B \approx 2 \cdot 10^{-4}$ эВ. Поскольку $\Delta\lambda$ много меньше $\lambda_1 - \lambda_2$, то эффект аномальный. Одна линия дублета

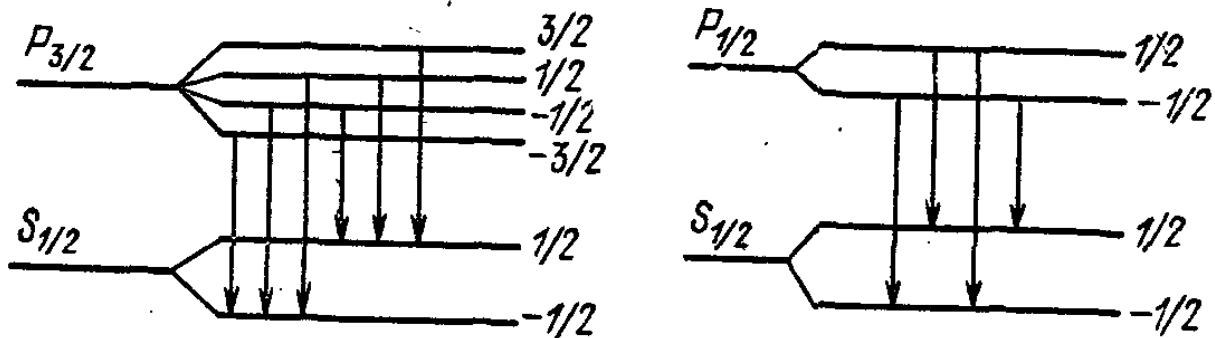


Рис. 77.

расщепится на шесть компонент, другая на четыре компоненты (рис. 77).

5.29. Различие в энергии связано с поворотом спина электрона в магнитном поле, созданном его орбитальным движением. При этом $\Delta E = 2\mu_B B$. Отсюда

$$B = \frac{\Delta E}{2\mu_B} = \frac{\hbar \Delta\omega}{2\mu_B} = \frac{2\pi \hbar c \Delta\lambda}{2\lambda^2 \mu_B} \approx 0,3 \text{ Т.}$$

5.30. Радиус второй боровской орбиты позитрония равен

$$r_2 = \frac{4\hbar^2}{me^2} = 8r_B,$$

где $m = m_e/2$ — приведенная масса для позитрония, а r_B — радиус первой орбиты атома водорода; проекция магнитного момента электрона и позитрона равна маг-

нетону Бора μ_B . Энергия взаимодействия приближенно равна

$$E \approx \frac{\mu_B^2}{(8r_B)^3} \approx 10^{-6} \text{ эВ.}$$

Спины состояний равны соответственно 0 и 1.

5.31. Энергия сверхтонкого расщепления

$$\Delta E \approx \frac{\mu_p \mu_e}{r_B^3} \approx 10^{-8} \text{ эВ,}$$

где μ_p и μ_e — магнитные моменты протона и электрона, $r_B = \frac{2^2 \hbar^2}{me^2}$ — радиус боровской орбиты при $n=2$. Неопределенность в энергии, связанная с естественным уширением спектральной линии, $\delta E \approx \hbar/\Delta t \approx 10^{-7}$ эВ. Поскольку $\Delta E \approx 0,1\delta E$, расщепление обнаружить нельзя.

5.32. Изменение энергии при переориентации спина

$$\Delta E \approx 2 \frac{\mu_p \mu_e}{r_B^3} \approx 10^{-6} \text{ эВ.}$$

Здесь r_B — радиус основного состояния атома водорода. Окончательно $\lambda = hc/\Delta E \approx 1$ м.

5.33. Дипольный электрический момент $p = 2\pi\hbar c/\lambda E$, размер диполя $l = p/e \approx 10^{-8}$ см.

5.34. Волновая функция низшего квантового уровня сферически симметрична. Записывая уравнение Шредингера в сферических координатах:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = E\Psi$$

и делая замену $\Psi(r) = u(r)/r$, находим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} = Eu.$$

Это уравнение должно решаться с граничным условием $u(R) = 0$, отвечающим бесконечно высокой стенке. Кроме того, волновая функция Ψ должна быть всюду ограниченной; поэтому $u(0) = 0$. Этим условиям удовлетворяют функции

$$\Psi_n(r) \propto \frac{1}{r} \sin\left(n \frac{\pi r}{R}\right) \quad \text{при } n \geq 1.$$

Низший уровень отвечает $n = 1$:

$$E_{э1} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mR^2}.$$

Складывая электронную энергию со свободной энергией поверхности $E_{\text{пов}} = 4\pi\sigma R^2$, получаем полную свободную энергию системы. Ее минимизация по R определяет равновесный радиус полости:

$$R = \left(\frac{\pi\hbar^2}{8\sigma m} \right)^{1/4} \approx 20 \text{ \AA}.$$

5.35. Потенциальная энергия атома в неоднородном поле $U(r) = -\frac{1}{2}\alpha E^2(r)$, и поэтому сила, действующая на единицу объема,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} N_A \alpha \frac{\rho}{\mu} \nabla E^2(r),$$

где μ — молярная масса. В нашей задаче эта сила направлена по радиусу к центру. Записывая условия равновесия жидкости, легко убедиться, что $dp/dr = F$. Интегрируя это уравнение с граничным условием на бесконечности $p(\infty) = 0$, находим

$$p(r) = \frac{1}{2} N_A \alpha \frac{\rho}{\mu} E^2(r).$$

Из приведенного в условии значения α следует, что диэлектрическая проницаемость $\epsilon \approx 1$; поэтому $E^2 = e^2/r^4$. С учетом этого граничное условие на поверхности шарика $p(R) = p_{\text{ТВ}}$ дает

$$R = \left(\frac{1}{2} N_A \alpha \frac{e^2 \rho}{\mu p_{\text{ТВ}}} \right)^{1/4} \approx 7 \text{ \AA}.$$

VI. ИЗЛУЧЕНИЕ

6.1. $T^4 = \frac{1}{2} \frac{R^2 H^2}{(H^2 + r^2)^2} T_0^4$, где r — расстояние от проекции центра диска. При решении использован закон Ламберта для углового распределения излучения.

$$6.2. \frac{W_{\text{корп}}}{W_{\text{луч}}} = \frac{2n(m_e + m_p)v^3}{\alpha^2 \sigma T^4} \approx 6 \cdot 10^{-8}.$$

$$6.3. n = \frac{4}{3} \frac{\sigma T^3}{ck} \approx 1,8 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}.$$

$$6.4. p = \frac{32}{3} \frac{\sigma T^4}{c} \approx 1,3 \cdot 10^{-9} \text{ атм}.$$

6.5. Так как свойства равновесного излучения не зависят от объема системы, то $U(V, T) = Vu(T)$ и

$S(V, T) = V s(T)$. Из термодинамических тождеств

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V, \quad T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

в сочетании с уравнением состояния получаем

$$s = \frac{1}{3} \frac{du}{dT}, \quad \frac{ds}{dT} = \frac{1}{T} \frac{du}{dT}.$$

Решение этой системы дает $u(T) = aT^4$, $s(T) = \frac{4}{3}aT^3$. Так как интегральная плотность излучения $u(T)$ связана с интегральной плотностью потока σT^4 соотношением $\sigma T^4 = \frac{c}{4} u(T)$, аналогичным газокинетической формуле для молекулярного потока, то $\sigma = \frac{c}{4} a$.

6.6. $C_p = \infty$, $VT^3 = \text{const}$.

6.7. $\frac{\omega_{\text{инд}}}{\omega_{\text{сп}}} = \bar{n}(E) = \frac{1}{e^{E/kT} - 1}$, где \bar{n} — средние планковские числа заполнения для осцилляторов. Для атома

$E \gg kT$ и

$$\frac{\omega_{\text{инд}}}{\omega_{\text{сп}}} \approx e^{-E/kT} \approx 1,6 \cdot 10^{-17},$$

а для спина $E \ll kT$ и

$$\frac{\omega_{\text{инд}}}{\omega_{\text{сп}}} \approx \frac{kT}{E} = \frac{kT}{2\mu B} \approx 2,2 \cdot 10^3.$$

6.8. Спонтанное излучение возникает из-за возмущающего влияния на молекулу нулевых колебаний электромагнитного поля. Поэтому вероятность спонтанного излучения пропорциональна произведению площади S под спектральной кривой поглощения молекулы (которая является мерой связи «внутримолекулярного осциллятора» с электромагнитным полем) на среднюю спектральную плотность $\rho_0(\omega)$ энергии нулевых колебаний электромагнитного поля на частоте, отвечающей переходу в молекуле, и в той точке пространства, где находится молекула. В вакууме подсчет числа нормальных осцилляторов на интервал частоты производится точно так же, как при выводе формулы Рэлея — Джинса, и в итоге

$$\omega_{\text{сп}}^3 \sim AS \rho_0(\omega) = AS \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3},$$

где A — некоторая константа.

В резонаторе в актуальной области частот имеется одно нормальное колебание с шириной $\sim \omega/Q$. Поэтому, если только ширина молекулярных уровней $\Gamma < \omega/Q$, плотность ρ_0 имеет порядок $\rho_0 \sim \frac{\hbar\omega/2}{V\omega/Q}$. Из-за изменения спонтанного времени жизни ширина Γ в резонаторе может значительно отличаться от ширины в вакууме, однако существенно, что, как и для обычного осциллятора с затуханием, амплитуда в резонансе и ширина меняются одновременно — так, что площадь под кривой поглощения остается неизменной. Поэтому

$$\bar{\omega}_{\text{сп}} \sim AS \frac{\hbar Q}{2V} \quad \text{и} \quad \frac{\omega_{\text{сп}}}{\omega_{\text{сп}}^0} \sim \pi^2 \frac{Qc^3}{V\omega^3}.$$

$$6.9. \quad \frac{n_{\text{розб}}}{n_{\text{полн}}} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\ln(1-\tau)}{2\alpha L} \right] \approx 0,505.$$

VII. ТВЕРДОЕ ТЕЛО

7.1. Согласно условию задачи волновые векторы падающего и рассеянного лучей равны $\mathbf{k} = k(1, 0, 0)$ и $\mathbf{k}' = \frac{1}{3}k(1, 2, 2)$ соответственно; здесь $k = 2\pi\nu/c$. Поэтому изменение волнового вектора при рассеянии

$$\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \frac{2}{3}k(-1, 1, 1).$$

С другой стороны, при брэгговском рассеянии

$$\mathbf{k}' - \mathbf{k} = 2\pi\mathbf{b},$$

где \mathbf{b} — целочисленный вектор обратной решетки. В кубической гранецентрированной решетке базисные векторы прямой решетки выбираются в виде $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}a(1, 1, 0)$ и аналогично \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 ; здесь a — межатомное расстояние. При этом базисные векторы обратной решетки построены по типу $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{a\sqrt{2}}(1, 1, 1)$. Отсюда видно, что в интерференции первого порядка вектор \mathbf{b} должен быть просто отождествлен с одним из минимальных векторов \mathbf{b}_i и поэтому

$$\frac{2}{3}k = \frac{2\pi}{a\sqrt{2}}.$$

Окончательно

$$a = \frac{3c}{2\sqrt{2}\nu} = 2,9 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

7.2. Решая уравнения собственных колебаний цепочки, получаем две ветви частот:

$$\omega_{1,2}^2(k) = \frac{\gamma}{\mu} \left\{ 1 \pm \left(1 - \frac{4\mu \sin^2 ka}{M_1 + M_2} \right)^{1/2} \right\}, \quad |ka| \leq \frac{\pi}{2}.$$

На нижней ветви при $|ka| \ll 1$ частота $\omega_1 \propto k$, и поэтому эта ветвь является акустической. На верхней ветви $\omega_2^2(k=0) = 2\gamma/\mu$; она называется оптической. Между ветвями существует щель, так как $\omega_2(\pi/2a) > \omega_1(\pi/2a)$. При $M_1 = M_2$ частоты

$$\omega_{1,2}^2(k) = \frac{\gamma}{\mu} (1 \pm \cos ka)$$

и щель исчезает. При этом период цепочки уменьшается вдвое, и поэтому можно рассматривать одну ветвь

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\mu} (1 - \cos ka)$$

в удвоенной области волновых чисел $|ka| \leq \pi$.

7.3. Решая уравнения вынужденных колебаний цепочки и вычисляя дипольный момент, находим поляризуемость

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{\mu(2\gamma/\mu - \omega^2)}.$$

Поляризуемость расходится на частоте длинноволновых оптических колебаний $\omega = (2\gamma/\mu)^{1/2}$.

7.4. Законы сохранения энергии и импульса при рассеянии нейтрона:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2M} = \frac{\hbar^2 (k')^2}{2M} \pm \hbar\omega(\mathbf{q}), \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}' \pm \mathbf{q} + 2\mathbf{b},$$

где верхний знак отвечает испусканию, а нижний — поглощению фонона. Во втором равенстве \mathbf{b} — произвольный целочисленный вектор обратной решетки. Экспериментально измеряя \mathbf{k} и \mathbf{k}' , можно из первого равенства непосредственно определить $\omega(\mathbf{q})$, а из второго \mathbf{q} ; при этом вектор \mathbf{b} определяется из того условия, что \mathbf{q} принадлежит первой бриллюэновской зоне. Это позволяет восстановить зависимость $\omega(\mathbf{q})$.

7.5. Записывая модельное уравнение колебаний

$$M\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx},$$

мы можем $U(x)$ взять в гармоническом приближении. Если учесть при этом, что изменение U при смещении ядер связано с взаимодействием электронных оболочек, следует оценить $U(x) \sim E_{\text{ат}}(x/a)^2$. Отсюда $\omega^2 \sim E_{\text{ат}}/Ma^2$; поскольку еще $E_{\text{ат}} \sim \hbar^2/ma^2$, окончательно получаем

$$\hbar\omega \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} E_{\text{ат}}.$$

Оценка для x_0 получается непосредственно, если учесть, что $U(x_0) \sim \hbar\omega$. Итак, малость амплитуд ($x_0 \ll a$), являющаяся необходимым условием существования молекул и кристаллов, является следствием малости «адиабатического параметра» $(m/M)^{1/2} \sim 10^{-2}$.

7.6. $C = \frac{2\pi^2}{15} \left(\frac{2}{s_l^3} + \frac{1}{s_t^3}\right) \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 kV$, где V — объем кристалла.

7.7. При низких температурах возбуждаются лишь фононы с импульсами $q \lesssim q_0 = kT/\hbar s$. Объем области в q -пространстве, отвечающей таким фононам, в двумерном случае $\propto q_0^2$, а в одномерном $\propto q_0$. Поэтому тепловая энергия $U \propto T^3$ и T^2 соответственно, а теплоемкость c пропорциональна T^2 и T .

7.8. Записывая уравнение колебаний ангармонического осциллятора:

$$M\ddot{x} = -\gamma x + \frac{1}{2} \delta x^2,$$

можно аналогично задаче 7.5 оценить $\gamma \sim E_{\text{ат}}/a^2$ и $\delta \sim E_{\text{ат}}/a^3$. Усредняя это уравнение по периоду колебаний ($0 < t < T$), имеем по определению

$$\bar{\ddot{x}} = \frac{1}{T} [\dot{x}(T) - \dot{x}(0)] = 0.$$

Поэтому $\bar{x} = (\delta/2\gamma) \bar{x}^2$. Но при слабом ангармонизме можно \bar{x}^2 взять в гармоническом приближении $\gamma \bar{x}^2/2 = kT/2$. Поэтому

$$\bar{x} = \frac{\delta}{2\gamma^2} kT$$

и коэффициент расширения

$$\alpha = \frac{\delta k}{2\gamma^2 a} \sim \frac{k}{E_{\text{ат}}} \sim 10^{-5} \text{ K}^{-1}.$$

Он не зависит от температуры во всей классической области $kT \gg \hbar\omega$.

7.9. $S = R \ln(2I + 1)$, так что $S_{\text{He}} = R \ln 2$, $S_{\text{Ar}} = 2R \ln 2$. Как обычно, за начало отсчета выбрана энтропия полностью упорядоченного состояния.

$$7.10. \kappa = \frac{d \ln n}{dp} = \frac{3}{5p} = \frac{3}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n^{5/3}} \approx 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ атм}^{-1}.$$

$$7.11. v_{Fz} = \frac{E_0 a}{\hbar} = 2,3 \cdot 10^7 \text{ см/с}, v_{Fx} = v_{Fy} = 0.$$

7.12. $v_F = \sqrt{\frac{2\pi a}{V} \frac{\hbar}{m}} = 1,05 \cdot 10^8 \text{ см/с}$, $\omega = \frac{eH}{mc} \cos \theta$; при решении используются уравнения движения $\mathbf{v} = \partial E(\mathbf{p})/\partial \mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$.

7.13. Распределение потенциала внутри проводника определяется уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi e (n - n_0)/\epsilon,$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость, возникающая

за счет электронов заполненных зон (т. е. всех электронов, за исключением электронов проводимости). В состоянии термодинамического равновесия уровень химического потенциала электронов ζ постоянен во всем кристалле. Однако из-за электрического поля дно зоны проводимости, отвечающее просто потенциальной энергии электрона, меняется от точки к точке (рис. 78); в результате $E_F = E_F(x)$.

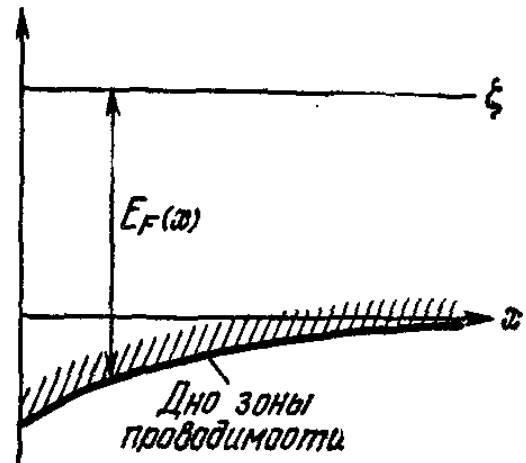


Рис. 78.

Если изгиб зон мал в сравнении с E_F , то

$$n - n_0 \approx \frac{dn}{dE_F} \Delta E_F = \frac{dn}{dE_F} e\varphi.$$

Объединяя эти уравнения, получаем

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi e^2}{\epsilon} \frac{dn}{dE_F} \varphi.$$

Решения этого уравнения

$$\varphi \propto \exp\left\{\pm \frac{x}{l_{TF}}\right\}, \text{ где } l_{TF} = \left(\frac{\epsilon}{4\pi e^2} \frac{dE_F}{dn}\right)^{1/2}.$$

При квадратичном законе дисперсии: $E_F \propto p_F^2$, $n \propto p_F^3$ (p_F — фермиевский импульс электронов), и поэтому

$$\frac{dE_F}{dn} = \frac{2}{3} \frac{E_F}{n};$$

следовательно,

$$l_{TF} = \left(\frac{\varepsilon E_F}{6\pi e^2 n} \right)^{1/2}.$$

Для указанных значений параметров $l_{TF} \approx 4 \cdot 10^{-9}$ см для металлов и $1,5 \cdot 10^{-6}$ см для полуметаллов. В первом случае полученное значение l_{TF} показывает, что внешнее поле практически полностью экранируется уже на одной постоянной решетки и внутрь металла не проникает.

7.14. Используя формулу для электронной теплоемкости $c_{эл} = \frac{\pi^2 k^2 T}{2 E_F} n$ и формулу для решеточной теплоемкости, следующую из задачи 7.6, получаем

$$kT = \sqrt{\frac{5}{4} \frac{(\hbar s)^3 n}{E_F}}.$$

Пользуясь оценкой для s , следующей из задачи 7.5, и полагая $E_F \sim E_{ат}$, получаем

$$kT \sim \left(\frac{m}{M} \right)^{3/4} E_{ат},$$

что дает $T \sim 10$ К.

7.15. $T \sim \Theta$, где $\Theta \sim \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \frac{E_{ат}}{k}$ — дебаевская температура кристалла. Задача решается аналогично 7.14.

7.16. Согласно уравнениям Максвелла из условия $\mathbf{H} = \mathbf{V} = 0$ следует

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \dot{\mathbf{D}} + 4\pi \mathbf{j} = 0.$$

Из первого соотношения следует, что электрическое поле такой волны является продольным, т. е. в уравнении

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \exp \{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)\}$$

амплитуда $E_0 \parallel \mathbf{k}$. \mathbf{D} и \mathbf{j} связаны с \mathbf{E} материальными уравнениями $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ и $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, где ε — диэлектрическая проницаемость, не связанная с электронами проводимости.

мости, а σ — удельная проводимость. Для зонных электронов $m^* \dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}$, где \mathbf{v} — средняя скорость потока электронов во внешнем поле. Отсюда

$$\mathbf{j}_0 = en\mathbf{v}_0 = i \frac{e^2 n}{m^* \omega} \mathbf{E}_0;$$

подстановка в $\mathbf{D} + 4\pi\mathbf{j} = 0$ определяет частоту собственных колебаний

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n}{\epsilon m^*}.$$

Для металлов $\omega_p \sim 2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$, $\hbar\omega_p \sim 10 \text{ эВ}$.

7.17. Чтобы ввести комплексную диэлектрическую проницаемость $\epsilon(\omega)$, надо следующим образом переписать уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \equiv \frac{\epsilon(\omega)}{c} \dot{\mathbf{D}}.$$

Тогда в соответствии с материальными уравнениями (ср. задачу 7.16)

$$\epsilon(\omega) = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}.$$

Вводя в уравнение движения электрона «трение», описывающее конечное время свободного пробега:

$$m^* \dot{\mathbf{v}} = -\frac{m^*}{\tau} \mathbf{v} + e\mathbf{E},$$

получаем

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2 n \tau}{m^* (1 - i\omega\tau)}, \quad \epsilon(\omega) = \epsilon \left\{ 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 + (i/\omega\tau)} \right\}.$$

Исходя из экспериментальных значений статической электропроводности металлов, легко оценить, что в оптическом диапазоне частот $\omega\tau \gg 1$ и поэтому

$$\epsilon(\omega) = \epsilon (1 - \omega_p^2 / \omega^2).$$

При $\omega < \omega_p$ $\epsilon(\omega) < 0$, т. е. имеет место полное («металлическое») отражение. В ультрафиолетовой области при $\omega > \omega_p$ (ср. задачу 7.16) $\epsilon(\omega) > 0$ и пропускание резко возрастает.

7.18. При не слишком высоких частотах ($\omega\tau \ll 1$) проводимость σ вещественна, причем ток проводимости значительно превышает ток смещения (при $\omega_p^2 \tau / \omega \gg 1$ —

ср. задачу 7.17). Тогда комплексное волновое число

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} = \frac{1+i}{\delta},$$

где $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\sigma}}$ — скин-глубина проникновения.

7.19. Уравнение движения электрона:

$$m^* \dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} - \frac{m^*}{\tau} \mathbf{v}, \quad \mathbf{H} \parallel z, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{H}.$$

Ищем только средний дрейф \mathbf{v} , опуская вращение вокруг направления \mathbf{H} , не дающее вклада в средний поток; для этого полагаем $\dot{\mathbf{v}} = 0$. Тогда

$$j_x = \sigma \frac{E_x + \omega_c \tau E_y}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \quad j_y = \sigma \frac{E_y - \omega_c \tau E_x}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \quad j_z = 0,$$

где $\sigma = e^2 n \tau / m^*$ — проводимость при $H = 0$, $\omega_c = eH / m^* c$ — циклотронная частота.

При $E_y = 0$ продольный ток равен

$$j_x = \frac{n}{1 + (\omega_c \tau)^2} E_x;$$

его падение с ростом H определяет магнетосопротивление. Поперечный ток

$$j_y = -\sigma \frac{\omega_c \tau}{1 + (\omega_c \tau)^2} E_x$$

является холловским. Наблюдения в этих условиях производятся в диске Корбино.

В пластине ток вдоль нормали отсутствует ($j_y = 0$), поэтому холловское поле $E_y = \omega_c \tau E_x$ и $j_x = \sigma E_x$. Надо подчеркнуть полное отсутствие магнетосопротивления; причина состоит в том, что ток идет не только под действием внешнего поля E_x , но и под действием холловского поля E_y . В сильных полях ($\omega_c \tau \gg 1$) доминирует второй вклад.

7.20. $\varphi_E = \varphi - e \sqrt{eE}$, $\mathcal{J}(E, T) = \mathcal{J}_0(T) e^{e\sqrt{eE}/kT}$.

7.21. Растекание заряда описывается уравнением непрерывности $\rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и материальным уравнением $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. В хороших проводниках изменение проводимости, связанное с избыточными носителями, образующими объемный заряд, ничтожно мало в сравнении с равновесной проводимостью, поэтому $\sigma = \text{const}$. Исполь-

зую еще $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, где ε — диэлектрическая проницаемость, связанная с электронами заполненных зон, и $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$, получаем окончательно

$$\dot{\rho} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \rho = 0.$$

Решение этого уравнения

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) e^{-t/\tau_M},$$

где $\tau_M = \varepsilon/4\pi\sigma$, а $\rho_0(\mathbf{r})$ — распределение заряда в начальный момент $t=0$. Из решения видно, что плотность ρ , не деформируясь, экспоненциально падает во времени, так что в тех областях пространства, где заряд при $t=0$ отсутствовал, постоянно сохраняется нейтральность. При этом ток \mathbf{j} , естественно, течет во всем пространстве. Для германия $\tau_M \approx 10^{-10}$ с.

7.22. В отличие от задачи 7.13, здесь равновесное распределение электронов определяется формулой $n(\mathbf{r}) = n_0 e^{-U(\mathbf{r})/kT}$, где $U(\mathbf{r}) = -e\varphi(\mathbf{r})$, а n_0 — концентрация электронов вне области объемного заряда. Слабость поля означает $|e\varphi| \ll kT$. При этом уравнение Пуассона сводится к

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi e^2 n_0}{\varepsilon kT} \varphi.$$

Его решения

$$\varphi \propto \exp\left\{\pm \frac{x}{l_D}\right\}, \quad \text{где } l_D = \left(\frac{\varepsilon kT}{4\pi e^2 n_0}\right)^{1/2}.$$

При указанных значениях параметров $l_D \sim 5 \cdot 10^{-5}$ см.

7.23. Решая уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial E(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}},$$

получаем

$$\omega_c^2 = \frac{e^2}{c^2} \left(\frac{H_x^2}{m_y m_z} + \frac{H_y^2}{m_x m_z} + \frac{H_z^2}{m_x m_y} \right).$$

$$7.24. \quad \sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega - \omega_c)^2 \tau^2}, \quad \text{где } \omega_c = \frac{eH}{m^* c}, \quad \sigma_0 = \frac{e^2 n \tau}{m^*},$$

n — концентрация.

7.25. Из $\dot{p}_x = eE$ следует

$$k_x = \frac{p_x}{\hbar} = \frac{eE}{\hbar} (t - t_0),$$

откуда с учетом $\dot{x} = v_x$ и $v_x = \partial \mathcal{E} / \partial p_x$ получаем

$$x(t) = x_0 + \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \cos \left\{ \frac{eEa}{\hbar} (t - t_0) \right\}.$$

Таким образом, электрон осциллирует вокруг равновесного положения x_0 с частотой $\omega_E = eEa/\hbar$, и средний ток равен нулю. Причина этого состоит в том, что кинетическая энергия $\mathcal{E}_0 \cos(k_x a)$ является ограниченной функцией k_x . В результате движение электрона с потенциальной энергией $U(x) = -eEx$ ограничено конечной областью (вследствие закона сохранения энергии).

7.26. В уравнении движения электрона

$$\dot{p}_x = \hbar \dot{k}_x = eE - \gamma v_x = eE + \gamma a \mathcal{E}_0 \sin(k_x a)$$

переменные разделяются, и оно непосредственно интегрируется в элементарных функциях. Вид решения различен в зависимости от величины параметра $\Gamma = \gamma a \mathcal{E}_0 / eE$.

а) $\Gamma > 1$. Решение имеет вид

$$\frac{\cos \{(k_x a - \varphi)/2\}}{\sin \{(k_x a + \varphi)/2\}} = \exp \left\{ -\sqrt{\Gamma^2 - 1} \frac{eEa}{\hbar} (t - t_0) \right\},$$

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{\Gamma} \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right).$$

При $t \rightarrow \infty$ оно переходит в $\Gamma \sin k_x a = -1$, что отвечает стационарным значениям k_x и v_x . Его можно непосредственно получить, положив в исходном уравнении $\dot{k}_x = 0$, что дает $v_x = eE/\gamma$ и проводимость $\sigma = e^2 n / \gamma$. При $\Gamma \gg 1$ справедливо неравенство $k_x a \ll 1$, т. е. электрон остается вблизи дна зоны; поэтому можно, как обычно (ср., например, задачу 7.19), положить $\gamma = m^* / \tau$ и тогда σ принимает стандартную форму $\sigma = e^2 n \tau / m^*$.

б) $\Gamma < 1$. Решение имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{k_x a}{2} = \sqrt{1 - \Gamma^2} \operatorname{tg} \left\{ \sqrt{1 - \Gamma^2} \frac{eEa}{2\hbar} (t - t_0) \right\} - \Gamma.$$

Из этого выражения следует, что с ростом t волновое число k_x также неограниченно растет, причем на этот рост накладываются осцилляции. Тангенс справа обращается в бесконечность через интервалы времени $\Delta t = \hbar / eEa \sqrt{1 - \Gamma^2}$. За каждый такой промежуток времени фаза аргумента тангенса, стоящего слева, возрастает на π , и, следовательно, k_x возрастает на $\Delta k_x = 2\pi/a$. Инте-

грируя исходное уравнение движения за промежуток времени Δt , находим

$$\hbar \Delta k_x = eE \Delta t - \gamma \int v_x dt = eE \Delta t - \gamma \Delta x,$$

где Δx — смещение электрона за время Δt . Отношение $\Delta x/\Delta t$ является средней скоростью дрейфа, а средняя плотность тока

$$j = \frac{e^2 n E}{\gamma} [1 - \sqrt{1 - \Gamma^2}].$$

В сильных полях, когда $\Gamma \ll 1$, получаем

$$j \approx \frac{e^2 n \Gamma^2 E}{2\gamma} \approx \frac{\gamma}{E},$$

т. е. конечный ток возникает только благодаря наличию силы «трения»; он возрастает по мере уменьшения времени свободного пробега.

7.27. Согласно условию электрон является медленным, т. е. $ka, k'a \ll 1$, где \mathbf{k} и \mathbf{k}' — волновой вектор электрона до и после рассеяния, а a — постоянная решетки. Аналогично, для длинноволновых фононов также $qa \ll 1$. Поэтому закон сохранения импульса можно записать в виде $\mathbf{k} = \mathbf{k}' \pm \mathbf{q}$ (ср. решение задачи 7.4 — из-за малости k, k' и q следует положить $\mathbf{b} = 0$). Для угла θ между \mathbf{p} и \mathbf{q} получается

$$\cos \theta = \frac{s}{v} \pm \frac{q}{2k},$$

где верхний знак отвечает испусканию, а нижний — поглощению фонона.

$$7.28. \sigma \sim \frac{e^2 n d^2 v}{6kT} \approx 1 \text{ См/м.}$$

7.29. Поступая так же, как и при решении задачи 7.21, получаем для времени релаксации

$$\tau_M = \frac{4\pi}{\epsilon} \frac{d}{dE} \{E\sigma(E)\}.$$

Если $\tau_M > 0$, флуктуация затухает; это имеет место при $E < E_0$. При $E > E_0$ флуктуация нарастает со временем.

7.30. В объеме V в обычном \mathbf{r} -пространстве и объеме V_k в пространстве волновых векторов содержится $V V_k / (2\pi)^3$ состояний. Так как для невырожденных электронов числа заполнения $n(\mathcal{E}) = \exp\left(\frac{\zeta - \mathcal{E}}{kT}\right)$, то концентрация электронов

$$n = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \exp \frac{\zeta - \mathcal{E}}{kT} = 2 \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} \exp \frac{\zeta}{kT} = Q \exp \frac{\zeta}{kT},$$

где ζ отсчитывается от дна электронной зоны ($\zeta < 0$). Величина Q называется статистическим фактором зоны.

7.31. Согласно задаче 7.30 концентрация электронов при произвольном ζ равна $n = Q_n e^{\zeta/kT}$. Совершенно аналогично концентрация дырок

$$p = Q_p \exp\left(-\frac{2\Delta + \zeta}{kT}\right),$$

где Q_p — статистический фактор дырочной зоны, а 2Δ — ширина запрещенной зоны. Тогда

$$np = Q_n Q_p e^{-2\Delta/kT}$$

не зависит от ζ , а следовательно, и от концентрации примесей. Но в собственном полупроводнике, вследствие электрической нейтральности, $n = p = n_i$. Поэтому в общем случае $np = n_i^2$.

7.32. При не слишком высоких температурах обмен электронами осуществляется только между донорами и электронной зоной. При этом условие электрической нейтральности имеет вид

$$Q_n e^{\zeta/kT} + \frac{N}{\exp\left(-\frac{2\Delta_1 + \zeta}{kT}\right) + 1} = N,$$

где N — концентрация доноров; для его получения достаточно записать число электронов в зоне и на донорах.

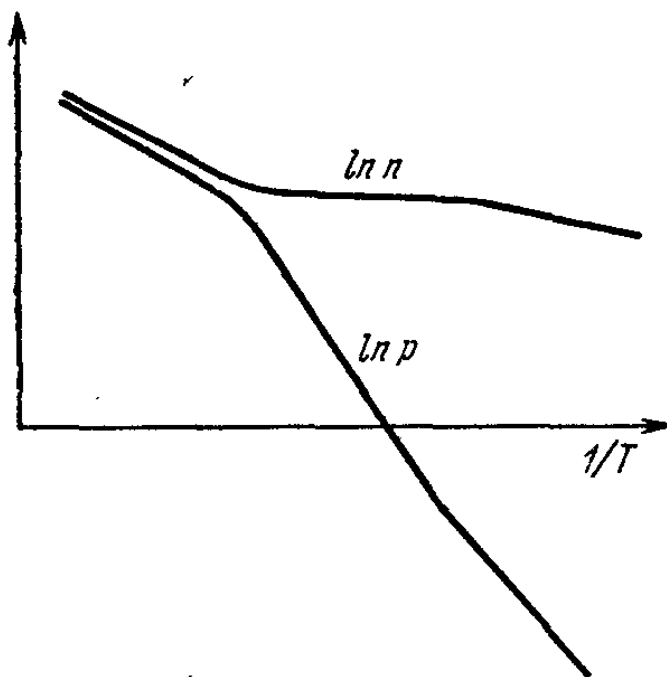


Рис. 79.

Таким образом, для $e^{\zeta/kT}$ получается квадратное уравнение, которое легко решается. При низких температурах таких, что $n \ll N$, имеем $n = \sqrt{NQ_n} e^{-\Delta_1/kT}$, а при более высоких $n \approx N$ — в этой области все примеси ионизированы (область истощения примесей). Концентрация дырок p выражается через n с помощью соотношения $np = n_i^2$ (ср. задачу 7.31).

При высоких температурах доминирует возбуждение электронов из заполненной зоны и тогда $n \approx p \approx n_i \approx \sqrt{Q_n Q_p} e^{-\Delta/kT}$; это имеет

место при $n_i(T) \gg N$. Схематически температурная зависимость n и p представлена на рис. 79.

7.33. $Ry^* = \frac{me^4}{2\hbar^2\epsilon^2}$, $a^* = \frac{\hbar^2\epsilon}{me^2}$, $M = m_n^* + m_p^*$, где m — приведенная масса:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_n^*} + \frac{1}{m_p^*};$$

$Ry^* \sim 0,7 \cdot 10^{-2}$ эВ, $a^* \sim 10^{-6}$ см.

7.34. Диффузионный поток дырок $j = -D \frac{dp}{dx}$, и уравнение непрерывности для дырочного потока

$$\frac{dj}{dx} + \frac{p}{\tau} = 0;$$

здесь p/τ — число актов рекомбинации в единицу времени в единице объема. Из этих соотношений следует диффузионное уравнение

$$D \frac{d^2p}{dx^2} - \frac{p}{\tau} = 0,$$

имеющее решения $p \propto \exp(\pm x/L)$, где $L = \sqrt{D\tau}$ — длина диффузионного смещения. После применения соотношения Эйнштейна $eD = kT\mu$ для приведенных значений параметров получается $L \approx 0,2$ см.

7.35. В сверхпроводниках $\mathbf{B} \approx \mathbf{H}$ и током смещения можно пренебречь в сравнении с током сверхпроводящих электронов. Поэтому уравнения Максвелла принимают вид

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2)$$

Уравнение движения электронов $m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}$ в сочетании с $\mathbf{j} = en\mathbf{v}$ дает $\mathbf{E} = \frac{m}{e^2n} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$. Подставляя в (1), получаем $\text{rot } \mathbf{j} = -\frac{e^2n}{mc} \mathbf{H}$. Исключая отсюда \mathbf{j} с помощью (2), находим уравнение для \mathbf{H}

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = -\frac{\mathbf{H}}{\lambda^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2n}} = \frac{c}{\omega_p}.$$

Преобразуя еще левую часть с учетом $\text{div } \mathbf{H} = 0$, получаем окончательно

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}}{\lambda^2}.$$

Для плоской поверхности металла оно имеет решения $H \sim \exp(\pm x/\lambda)$, т. е. магнитное поле экспоненциально затухает вглубь сверхпроводника. Поскольку частота внешнего поля не входит в λ , результат в полной мере относится к постоянному магнитному полю. Искомая глубина $\lambda \sim 10^{-5} - 10^{-6}$ см.

7.36. В ядре He^3 содержатся три нуклона, и его спин $s = 1/2$. Так как спин электронной оболочки равен нулю, то атом He^3 является фермионом. Пользуясь формулами для вырожденного ферми-газа, получаем для теплоемкости в расчете на моль

$$C = \frac{\pi^2}{2} R \frac{T}{E_F},$$

где энергия Ферми.

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{3\pi^2 N_A}{V} \right)^{2/3};$$

здесь M — масса атома, а N_A — число Авогадро. Определяя Θ так, чтобы $C = RT/\Theta$, находим $\Theta \sim 1$ К.

VIII. ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

8.1. Масса частицы в данном опыте равна $E_{\text{сцм}}$, соответствующей положению максимума. Полуширина резонансной кривой на уровне 1/2 высоты $\Delta \approx 2$ МэВ. Время жизни находим из соотношения $\tau \approx \frac{\hbar}{\Delta E} \approx \approx 3 \cdot 10^{-22}$ с. Для нахождения массы в другом опыте воспользуемся релятивистской инвариантностью квадрата четырехимпульса:

$$m^2 c^4 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2 = 4E^2 - 3p^2 c^2,$$

так как по условию $E_1 = E_2 = E$ и, следовательно $p_1 = p_2 = p$, а $\cos(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \cos \varphi = 1/2$. Поскольку e^+ и e^- ультрарелятивистские ($v \approx c$), то $E \approx pc$ и $mc^2 \approx 3,1$ ГэВ.

8.2. Протон состоит из трех кварков $q_p q_r q_n$. Спины двух из них параллельны друг другу, спин третьего антипараллелен им. Ω -гиперон имеет странность $S = -3$ и может состоять лишь из трех одинаковых кварков $q_\Lambda q_\Lambda q_\Lambda$, спины которых параллельны (спин Ω -гиперона $3/2 \hbar$), π^+ -мезон и K^+ -мезон состоят из кварков $q_p q_n$ и

$q_p \tilde{q}_\Lambda$, а джи-мезон из кварков $q_c \tilde{q}_c$. У π - и K -мезонов спины кварка и антикварка антипараллельны, у джи-частицы — параллельны. На примере построения Ω -гиперона видно, что в простейшей кварковой модели кварки не подчиняются принципу Паули.

8.3. $T = Mc^2 - (m_{\tilde{\Lambda}} + 3m_\pi) c^2 = 714$ МэВ, что составляет долю $\delta = T/Mc^2 = 0,30$. Здесь $m_{\tilde{\Lambda}}$ и m_π — массы $\tilde{\Lambda}$ -частицы и пиона.

8.4. Полная энергия, выделяемая при аннигиляции, $E = 2M_p c^2$. Энергия π^0 -мезона наибольшая, если импульсы всех трех пионов коллинеарны, причем $\mathbf{p}_{\pi^+} = \mathbf{p}_{\pi^-}$. Тогда

$$E_{\pi^+} = E_{\pi^-} \quad \text{и} \quad \mathbf{p}_{\pi^0} = 2\mathbf{p}_{\pi^\pm}. \quad (1)$$

(Если $\rho_{\pi^+} \neq \rho_{\pi^-}$, то центр масс π^+ и π^- движется медленнее, чем в случае равенства импульсов, так как часть энергии уходит на относительное взаимное движение пионов.) Закон сохранения энергии:

$$2M_p c^2 = E_{\pi^0} + 2E_{\pi^\pm} = E_{\pi^0} + 2\sqrt{\rho_{\pi^\pm}^2 c^2 + m_{\pi^\pm}^2 c^4},$$

а используя (1), получим

$$E_{\pi^0} = \frac{4M_p^2 c^4 - 3m_{\pi^\pm}^2 c^4}{4M_p c^2} \approx 0,92 \text{ ГэВ.}$$

8.5. Число взаимодействий в объеме dV за время dt

$$d\eta = \sigma u_{12} \rho_1 \rho_2 dV dt,$$

где $u_{12} = |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|$, плотности частиц $\rho_1 = \rho_2 = n/c$ (n — поток, c — скорость света). В нашем случае разность скоростей частиц $u_{12} = 2c$ так как $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2$ и $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| \approx c$. Число отсчетов (с учетом эффективности их регистрации $\varepsilon = 0,1$)

$$K = \varepsilon \frac{d\eta}{dt} = 2\varepsilon\sigma \frac{n^2}{c} dV.$$

Учитывая, что $dV = Sl$, найдем

$$n = \left(\frac{Kc}{2\varepsilon l \sigma S} \right)^{1/2}$$

и окончательно ток в кольце

$$\mathcal{I} = enS = \left(\frac{KSc\varepsilon^2}{2\varepsilon l \sigma} \right)^{1/2} \approx 2 \text{ А.}$$

8.6. Излучение начинается при скорости частицы $v = c/n$. Соответствующая кинетическая энергия

$$T = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - 1 \right] = \\ = m_0 c^2 \left[\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right] \approx 4,8 \text{ ГэВ.}$$

Показатель преломления n найдем из следующего соотношения: $n^2 = 1 + 4\pi\alpha N$, где N — число атомов в единице объема, а α — поляризуемость молекул азота. Поскольку при постоянной температуре $N \sim \rho$, т. е. N пропорционально давлению, а $n^2 - 1 \sim 2(n - 1)$, то

$$\frac{n-1}{n_0-1} \approx \frac{\rho}{\rho_0},$$

где $\rho_0 = 1$ атм.

8.7. В счетчике возникает свечение только от каонов в случае, если $\frac{c}{v_K} > n > \frac{c}{v_\pi}$, где v_K и v_π — скорости каонов и пионов с импульсом p и полной энергией E . Так как $\beta = v/c = pc/E$, то

$$\sqrt{1 + \frac{m_K^2 c^4}{p^2 c^2}} = \sqrt{2} > n > \sqrt{1 + \frac{m_\pi^2 c^4}{p^2 c^2}} = \sqrt{1,1},$$

где $m_K c^2$ и $m_\pi c^2$ — массы каона и пиона соответственно.

8.8. Пробег до распада $\approx 70\%$ пионов равен ($v \approx c$)

$$L \approx c\tau_0 \frac{E_\pi}{m_\pi c^2} \approx 600 \text{ м.}$$

8.9. Из законов сохранения энергии и импульса

$$E_p + m_p c^2 = E_\pi + m_d c^2 \quad \text{и} \quad p_p = p_\pi$$

нетрудно получить

$$E_p = \frac{2m_p^2 c^4 - m_\pi^2 c^4}{2m_p c^2} \approx 1 \text{ ГэВ.}$$

8.10. Число пионов, достигших детектора, $n = N\Omega e^{-t/\tau}$, где N — число всех генерированных пионов, Ω — телесный угол, под которым виден детектор из точки генерации мезонов $\Omega = S/L^2$, t — время пролета пионом пути L , τ — время жизни пиона в лабораторной системе координат:

$$\tau = \tau_0 \frac{E}{m_\pi c^2} \approx \tau_0 \left(1 + \frac{T}{m_\pi c^2} \right),$$

где T — кинетическая энергия. Окончательно получим

$$N = n \frac{L^2}{S} \exp \left[\frac{L}{\sigma \tau_0} \frac{m_{\pi} c^2}{\sqrt{T^2 + 2m_{\pi} c^2 T}} \right] \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ частиц/с.}$$

8.11. Убыль протонов вследствие взаимодействия в слое азота dx (в г/см²) равна

$$-dN = N \frac{dx}{\Lambda},$$

где Λ — средний свободный пробег до взаимодействия. Обозначим x_0 толщину атмосферы Земли ($x_0 \approx 1000$ г/см²). Из решения уравнения получим

$$N(x = x_0) = N(x = 0) \exp \left(-\frac{x_0}{\Lambda} \right).$$

Здесь $\Lambda = A/\sigma N_A$, где N_A — число Авогадро, A — относительная атомная масса азота, $\sigma = \pi R^2$, R — радиус ядра азота. Отсюда окончательно

$$N(x = x_0)/N(x = 0) = 7 \cdot 10^{-6}.$$

8.12. Число атомов ${}_{18}\text{Ar}^{37}$

$$n = \Phi \sigma t N_{\text{Cl}},$$

где $t = 1$ год $= 3,2 \cdot 10^7$ с, N_{Cl} — число атомов хлора, $\Phi = \frac{N}{4\pi R^2}$ — поток нейтрино на Земле. Отсюда

$$N_{\text{Cl}} = \frac{4\pi R^2 n}{N \sigma t}$$

и окончательно получим, что в эксперименте необходимо использовать CCl_4 в количестве

$$M = \frac{\mu N_{\text{Cl}}}{4} \frac{1}{\eta} = \mu N_{\text{Cl}} \approx 560 \text{ т,}$$

где μ — молярная масса CCl_4 .

8.13. Определим сначала, какая наибольшая энергия может выделяться в системе центра масс. По определению скорость системы центра масс

$$\beta_{\text{ц}} = \frac{\sum_{i=1}^2 p_i c}{\sum_{i=1}^2 E_i},$$

где p_i и E_i — импульсы и энергия протонов в L -системе до реакции. В нашем случае

$$\beta_{\text{ц}} = \frac{pc}{\sqrt{p^2 c^2 + m_p^2 c^4} + m_p c^2} \approx 0,82.$$

Отсюда энергия каждого из соударяющихся протонов в СЦМ равна (энергии одинаковы, так как одинаковы импульсы и равны массы соударяющихся частиц)

$$E = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \beta_{ц}^2}} = \gamma m_p c^2 = 1,8 \text{ ГэВ.}$$

Суммарная энергия в СЦМ, которая может быть затрачена на рождение новых частиц, равна

$$2E - 2m_p c^2 \approx 1,6 \text{ ГэВ,}$$

так как согласно закону сохранения барионного числа после реакции оба протона (или других бариона) сохраняются. Наибольшее число пионов образуется тогда, когда, все рожденные пионы в СЦМ покоятся, а барионами остаются нуклоны. Поэтому окончательно

$$n = \frac{2E - 2m_p c^2}{m_\pi c^2} \approx 11.$$

8.14. Найдем кинетическую энергию мюона из законов сохранения энергии и импульса:

$$T_\mu = \frac{m_K^2 c^4 + m_\mu^2 c^4}{2m_K c^2}.$$

Время жизни

$$\tau = \frac{E}{m_\mu c^2} \tau_0 = \frac{T_\mu + m_\mu c^2}{m_\mu c^2} \tau_0 = 5,4 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

8.15. Момент импульса, полученный диском, равен суммарному моменту поглощенных частиц

$$L = \frac{1}{4} \frac{N\hbar}{2}.$$

Коэффициент 1/4 возникает вследствие учета углов падения электронов на диск:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\Omega = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot d \cos \theta.$$

Угол поворота диска равен

$$\varphi = \frac{L}{f} = \frac{N\hbar}{8f} \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ рад.}$$

8.16. При намагничивании число спинов ядер фтора, направленных по полю N_1 и против поля N_2 , различно и их разность ΔN равна

$$\Delta N = N_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{2\mu B}{kT}\right) \right] = N_1 \frac{2\mu B}{kT} = \frac{N_0}{2} \frac{2\mu B}{kT} = N_0 \frac{\mu B}{kT} \ll 1$$

(μ — магнитный момент ядер фтора, k — постоянная Больцмана, N_0 — число ядер фтора). При выключении поля половина избытка ядер $\Delta N/2$ изменит ориентацию и образец получит момент импульса

$$L = \frac{1}{2} \Delta N \frac{\hbar}{2} = \frac{1}{4} \frac{\mu B \hbar}{kT} N_0, \quad N_0 = 2N_A,$$

где N_A — число Авогадро. Отсюда

$$\mu = L \frac{2kT}{N_A \hbar B} = 1,31 \cdot 10^{-26} \text{ Дж/Т} = 2,62 \mu_n.$$

8.17. Зависимость периода полураспада от энергии (в МэВ) определяется приближенным законом Гейгера — Нэттола

$$\lg T_{1/2} \approx C + \frac{D}{E^{1/2}}.$$

Константы C и D определим из условий задачи: $D = 149$ и $C = -57$. Искомое $T_{1/2} \sim 10^{84}$ лет.

8.18. Найдем сначала пробег α -частицы в алюминии R_{Al} . Так как потери энергии на ионизацию пропорциональны NZ , где N — число атомов в 1 см^3 , Z — заряд ядра, то

$$\frac{R_{Al}}{R_B} = \frac{(NZ)_B}{(NZ)_{Al}}.$$

Число ядерных реакций, происходящих в тонком слое dx , равно $dv = n_\alpha N_{Al} \sigma dx = n_p$, а $dx \approx R_{Al}$. Окончательно получим

$$\sigma = \frac{n_p}{n_\alpha N_{Al} R_{Al}} = \frac{n_p Z_{Al}}{n_\alpha (NZ)_B R_B} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ барн}.$$

8.19. Число актов деления урана $n = N/E \approx 3,1 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$, где E — средняя суммарная энергия, выделяемая на один акт деления урана. Поток анти-нейтрино за защитой

$$\Phi_{\bar{\nu}} \approx \frac{\langle n_{\bar{\nu}} \rangle n}{4\pi L^2} = 6 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Доля энергии, уносимая потоком антинейтрино: \sim

$$\eta = \frac{\langle E_{\bar{\nu}} \rangle \langle n_{\bar{\nu}} \rangle}{E} \approx 0,05.$$

8.20. Поскольку γ -кванты разлетаются под углом 180° , то π^0 -мезон в L -системе покоится. Поэтому

$$p_n = p_d = p \quad \text{и} \quad E_n + m_p c^2 = E_d + m_\pi c^2,$$

или

$$\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + m_p c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_d^2 c^4} + m_\pi c^2.$$

Пренебрегая энергией связи дейтрона и разницей масс протона и нейтрона, т. е. полагая $m_n = m_p = m$, $m_d = 2m$, $m_\pi = \mu$, получаем

$$\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + 4m^2 c^4} + \mu c^2,$$

$$T_n = E_n - mc^2 = \frac{3m^2 c^4 - (m - \mu)^2 c^4}{2(m - \mu) c^2} - mc^2 \approx 300 \text{ МэВ}.$$

Нерелятивистское рассмотрение:

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{p^2}{4m} + \mu c^2,$$

откуда

$$T_n \approx 2\mu c^2 = 270 \text{ МэВ}$$

(менее точно).

8.21. Обозначим через $N(t)$ число нейтронов в сосуде в момент времени t . Число соударений нейтронов с единичной площадкой внутренней поверхности сосуда равно $vN/4V$. Число нейтронов в сосуде убывает по двум причинам: из-за распада и ухода через фольгу. Убыль нейтронов равна

$$-dN = N \frac{dt}{\tau} + \frac{N}{V} \frac{v}{4} S dt.$$

Решение этого уравнения дает

$$N = N_0 \exp \left[- \frac{t}{[1/\tau + vS/4V]^{-1}} \right].$$

По условию задачи

$$[1/\tau + vS/4V]^{-1} = \tau/2.$$

Отсюда окончательно получим

$$S = \frac{4V}{v\tau} \approx 0,8 \text{ мм}^2.$$

8.22. Энергия связи ядра, т. е. формула Вайцекера:

$$U = 14,0A - 13,0A^{2/3} - 0,584 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \text{малые члены.}$$

Известно, что радиус ядра $R_{\text{я}} = r_0 A^{1/3}$, где $r_0 \approx \approx 1,25 \cdot 10^{-13}$ см. Поэтому

$$U \text{ (МэВ)} \approx 14,0A - \frac{13,0}{4\pi r_0^2} S - 0,584 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \dots,$$

где S — поверхность ядра. Коэффициент поверхностного натяжения

$$\sigma = \left| \frac{\partial U}{\partial S} \right| \approx \frac{13,0}{4\pi r_0^2} \text{ МэВ/см}^2 \approx 1,1 \cdot 10^{17} \text{ Дж/м}^2.$$

8.23. Предельная скорость v_0 определяется из условия задачи:

$$\frac{v_0}{v_T} = \sin i \approx 3 \cdot 10^{-3},$$

где

$$v_T = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Нейтроны, у которых $v < v_0$, будут захватываться полностью в полости. Их относительное число

$$\eta = \frac{\int_0^{v_0} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right] v^2 dv}{\int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right] v^2 dv} \approx \frac{\frac{v_0^3}{3}}{\frac{\sqrt{\pi}}{4} (v_T^2)^{3/2}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{v_0}{v_T}\right)^3 \approx 2 \cdot 10^{-8}.$$

8.24. Время жизни

$$\tau = \frac{1}{n\sigma v_T} \approx 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ с,}$$

где n — концентрация водорода, v_T — тепловая скорость нейтрона (см. решение 8.23).

8.25. Полное число спиновых состояний для системы из двух частиц со спинами I и $i = 1/2$ (в единицах \hbar) есть

$$(2i + 1)(2I + 1) \text{ или } 2(2I + 1).$$

Число состояний с суммарным спином $I_c = I + 1/2$ равно $2I_c + 1 = 2(I + 1)$, а число состояний с $I_c = I - 1/2$ есть $2I$. Таким образом, вероятность рассеяния с параллельной ориентацией I и i равна $\frac{I+1}{2I+1} = \frac{5}{8}$, а с антипараллельной $\frac{I}{2I+1} = \frac{3}{8}$.

8.26. Из законов сохранения энергии и импульса

$$E_\gamma = T_\pi + T_n - Q, \quad \frac{E_\gamma}{c} = p_\pi + p_n,$$

где

$$Q = (mc^2)_{Li^7} - [(mc^2)_{Li^6} + (mc^2)_n],$$

получим искомые

$$T_\pi = p_\pi^2 / 2m_\pi \approx 1 \text{ МэВ} \text{ и } T_n = p_n^2 / 2m_n \approx 6 \text{ МэВ}.$$

8.27. Поскольку энергия связи нуклонов мала, для оценки можно считать, что продольный импульс нуклонов $p_l \approx \frac{E_\gamma}{c}$. Поперечный импульс нуклонов в ядре обусловлен фермиевским движением нуклонов. Ферми-импульс оценим из соотношения неопределенности

$$p_F \sim \Delta p \sim \frac{\hbar}{r_d} \sim 100 \text{ МэВ}.$$

Оценку для угла рассеяния нуклонов получим из соотношения

$$\varphi \approx \frac{p_F}{p_l} \approx 0,2 \text{ рад}.$$

8.28. Для УХН $mv^2/2 \ll kT$ — энергии теплового движения, и поэтому их спектр, т. е. распределение по скоростям, есть

$$dN(v) \sim \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right] v^2 dv \sim v^2 dv.$$

Спектр потока нейтронов будет

$$d\Phi \propto v dN(v) \propto v^3 dv \propto E dE$$

(E — энергия нейтронов). Максимальная энергия УХН: $E_{\text{гр}} = mv_{\text{гр}}^2/2$. До детектора дойдут лишь те нейтроны, энергия которых $E = mv^2/2 \geq mgh$. Таким образом, скорость счета детектора равна суммарному потоку:

$$\Phi = \int_{mgh}^{E_{\text{гр}}} d\Phi \propto E_{\text{гр}}^2 - m^2 g^2 h^2.$$

Окончательно получим при $\Phi = 0$:

$$h_{\text{пред}} = \frac{E_{\text{гр}}}{mg} \approx \frac{v_{\text{гр}}^2}{2g} \approx 5 \text{ м.}$$

I. КОНСТАНТЫ И ТАБЛИЦЫ

1. Фундаментальные физические постоянные

СИ	СГС
Скорость света в вакууме $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с	3 · 10 ¹⁰ см/с
Заряд электрона $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл	4,80 · 10 ⁻¹⁰ СГСЭ
Масса атома водорода $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг	1,67 · 10 ⁻²⁴ г
Постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К	1,38 · 10 ⁻¹⁶ эрг/К
Постоянная Планка $\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с	1,05 · 10 ⁻²⁷ эрг · с
Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(К · моль)	8,31 · 10 ⁷ эрг/(К · моль)
Гравитационная постоянная $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м ² /кг ²	6,67 · 10 ⁻⁸ дин · см ² /г ²
Число Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Число Лошмидта	$n_0 = 2,69 \cdot 10^{19}$ см ⁻³

2. Электрические, атомные и ядерные константы

Постоянная электрическая $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м	
Постоянная магнитная $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$ Г/м	
Постоянная Стефана — Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² · К ⁴)	5,67 · 10 ⁻⁵ эрг/(с · см ² · К ⁴)
Постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$	

СИ	СГС
Масса покоя электрона	$m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$
Масса покоя протона	$m_p c^2 = 938 \text{ МэВ}$
Масса покоя дейтрона	$m_d c^2 = 1876 \text{ МэВ}$
Масса покоя α -частицы	$m_\alpha c^2 = 3726 \text{ МэВ}$

Постоянная Ридберга для бесконечно большой массы

$$R_\infty = 10\,973\,731 \text{ м}^{-1}$$

$$109737,31 \text{ см}^{-1}$$

Ионизационный потенциал атома водорода

$$I = 13,6 \text{ эВ}$$

Боровский радиус

$$r_B = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$$0,53 \cdot 10^{-8} \text{ см}$$

Магнетон Бора

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Т}$$

$$0,927 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс}$$

Ядерный магнетон

$$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Т}$$

$$5,05 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс}$$

Классический радиус электрона

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ м}$$

$$2,82 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Атомная единица массы

$$1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 931 \text{ МэВ}$$

$$1,5 \cdot 10^{-3} \text{ эрг}$$

Комптоновская длина волны электрона

$$\Lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} = 3,86 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

$$3,86 \cdot 10^{-11} \text{ см}$$

Комптоновская длина волны пиона

$$\Lambda_\pi = \frac{\hbar}{m_\pi c} = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ м}$$

$$1,4 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Комптоновская длина волны нуклона

$$\Lambda_n = \frac{\hbar}{m_n c} = 0,2 \cdot 10^{-15} \text{ м}$$

$$0,2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Ядерное время $\tau_n = R_n/c \approx 0,5 \cdot 10^{-23} \text{ с}$, где R_n — радиус действия ядерных сил

Температура $293,4 \text{ К} = 20,4 \text{ }^\circ\text{С}$ соответствует $kT = 0,0253 \text{ эВ}$

При энергии $\frac{m_n v_0^2}{2} = 0,0253 \text{ эВ}$ нейтрон имеет скорость $v_0 = 2200 \text{ м/с}$

Длина волны нейтрона $\lambda_n = 0,287/\mathcal{E}^{1/2}$ (\mathcal{E} в эВ, λ_n в 10^{-8} см)

3. Некоторые астрофизические постоянные

Масса Солнца

$$M_{\text{C}} = 1,99 \cdot 10^{33} \text{ г}$$

Энергия, испускаемая Солнцем в 1 с (светимость)

$$L_{\text{C}} = 3,86 \cdot 10^{26} \text{ Вт} = 3,86 \cdot 10^{33} \text{ эрг/с}$$

Радиус Солнца

$$R_{\text{C}} = 6,96 \cdot 10^{10} \text{ см}$$

Угловой радиус Солнца на среднем расстоянии от Земли

$$\alpha_{\text{R}} = 4,65 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

Температура Солнца вблизи поверхности

$$T_{\text{C}} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ К}$$

Масса Земли

$$M_{\text{З}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

Радиус Земли (на экваторе)

$$R_{\text{З}} = 6,38 \cdot 10^8 \text{ см}$$

Температура Земли (средняя)

$$T_{\text{З}} = 300 \text{ К}$$

Средняя скорость движения Земли по орбите

$$v_{\text{З}} = 3 \cdot 10^6 \text{ см/с}$$

II. НЕКОТОРЫЕ ВНЕСИСТЕМНЫЕ ЕДИНИЦЫ

	СИ	СГС
Единицы длины:		
световой год	$9,5 \cdot 10^{15} \text{ м}$	$9,5 \cdot 10^{17} \text{ см}$
парсек (пк)	$3,1 \cdot 10^{16} \text{ м}$	$3,1 \cdot 10^{18} \text{ см}$
ангстрем (Å)	10^{-10} м	10^{-8} см
ферми	10^{-15} м	10^{-13} см
Единица площади:		
барн	10^{-28} м^2	10^{-24} см^2
Единица времени:		
год		$3,16 \cdot 10^7 \text{ с}$
Единица энергии:		
электронвольт	$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$	

III. ЕДИНИЦЫ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В СИСТЕМАХ СИ И СГС И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НИМИ

Физическая величина	Система СИ			Гауссова система (СГС)			Соотношение между единицами
	Единица		Размерность	Единица		Размерность	
	Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение		
Частота	герц	Гц	T ⁻¹	герц	Гц	T ⁻¹	1
Плотность	килограмм на кубический метр	кг/м ³	L ⁻³ M	грамм на кубический сантиметр	г/см ³	L ⁻³ M	1 кг/м ³ = 10 ³ г/см ³
Скорость	метр в секунду	м/с	LT ⁻¹	сантиметр в секунду	см/с	LT ⁻¹	1 м/с = 10 ² см/с
Ускорение	метр на секунду в квадрате	м/с ²	LT ⁻²	сантиметр на секунду в квадрате	см/с ²	LT ⁻²	1 м/с ² = 10 ² см/с ²
Угловая скорость	радиан в секунду	рад/с	T ⁻¹	радиан в секунду	рад/с	T ⁻¹	1
Угловое ускорение	радиан на секунду в квадрате	рад/с ²	T ⁻²	радиан на секунду в квадрате	рад/с ²	T ⁻²	1
Сила	ньютон	Н	LMT ⁻²	дин	дин	LMT ⁻²	1 Н = 10 ⁵ дин
Работа, энергия, количество теплоты	джоуль	Дж	L ² MT ⁻²	эрг	эрг	L ² MT ⁻²	1 Дж = 10 ⁷ эрг
Мощность	ватт	Вт	L ² MT ⁻³	эрг в секунду	эрг/с	L ² MT ⁻³	1 Вт = 10 ⁷ эрг/с
Количество электричества, электрический заряд	кулон	Кл	TI	единица заряда СГС	СГС	L ^{3/2} M ^{1/2} T ⁻¹	1 Кл = 3 · 10 ⁹ СГС

Физическая величина	Система СИ			Гауссова система (СГС)			Соотношение между единицами
	Единица		Размерность	Единица		Размерность	
	Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение		
Электрическое напряжение, разность потенциалов, электродвижущая сила	вольт	В	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	единица напряжения СГС	СГС	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1 В = \frac{1}{300} СГС$
	вольт на метр	В/м	$LMT^{-3}I^{-1}$	единица напряженности СГС	СГС	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1 В/м = \frac{1}{3 \cdot 10^4} СГС$
	ом	Ом	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	единица сопротивления СГС	СГС	$L^{-1}T$	$1 Ом = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} СГС$
Электрическое сопротивление	генри	Г	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	единица индуктивности СГС	СГС	L	$1 Г = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} СГС$
	фарада	Ф	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	сантиметр	см	L	$1 Ф = 9 \cdot 10^{11} см$
Электрическая емкость	вебер	Вб	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	максвелл	Мкс	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1 Вб = 10^8 Мкс$
	тесла	Т	$MT^{-2}I^{-1}$	гаусс	Гс	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1 Т = 10^4 Гс$
	ампер на метр	А/м	$L^{-1}I$	эрстед	Э	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$1 А/м = 4 \pi \cdot 10^{-3} Э$
Световой поток	люмен	лм	J	люмен	лм	J	1
	кандела на квадратный метр	кд/м ²	$L^{-2}J$	кандела на квадратный сайтиметр	кд/см ²	$L^{-2}J$	$кд/м^2 = 10^{-4} кд/см^2$
Яркость	люкс	лк	$L^{-2}J$	фот	фот	$L^{-2}J$	$лк = 10^{-4} фот$
Освещенность							

IV. ТАБЛИЦА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ *)

Частица	Символ **)	Масса		Время жизни, с	Спин, \hbar	Заряды			Изотопсин		Странность, S	Преобладающая схема распада	
		Мэв	m_e			Электрический, e	Лептонный	Барийный	T	T_z			
Фотон	γ	0	0	∞	1	0	0	0					
Лептоны	Нейтрино	0	0	∞	$1/2$	0	+1	0					
	Электрон	0,511	1	∞	$1/2$	-1	+1	0					
	Мюон	105,66	206,77	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$1/2$	-1	+1	0				$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$	
Мезоны	Пи-мезоны	π^+	139,6	$2,55 \cdot 10^{-8}$	0	+1	0	0	1	+1	0	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$	
		π^0	135,0	$2 \cdot 10^{-16}$	0	0	0	0	1	0	0	$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$	
	К-мезоны	K^+	493,8	966,3	$1,23 \cdot 10^{-8}$	0	+1	0	0	$1/2$	$+1/2$	+1	$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
		K^0	498,0	974,5	$K_1^0 \cdot 10^{-10}$	0	0	0	0	$1/2$	$-1/2$	+1	$K_1^0 \rightarrow 2\pi$
		\bar{K}^0			$K_2^0 \cdot 10^{-8}$								$K_2^0 \rightarrow 3\pi$

*) Античастицы имеют тождественные с частицей значения массы, времени жизни, спина и изотопсина T и противоположные по знаку значения электрического, лептонного и барийного зарядов, проекции изотопсина T_z и странности S.

***) Справа указаны символы соответствующих античастиц.

Частица	Символ (**)	Масса		Время жизни, с	Спин, \hbar	Заряды			Изотопспин		Странность, S	Преобладающая схема распада
		Mав	m_e			Электронес-кий e	Лептонный	Баронный	T	T_z		
Протон Нейтрон	p	938,26	1836,1	∞	$1/2$	+1	0	+1	$1/2$	$+1/2$	0	$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
	n	939,55	1838,6	$1 \cdot 10^8$	$1/2$	0	0	+1	$1/2$	$-1/2$	0	$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$
	Λ^0	1115,4	2182,8	$2,6 \cdot 10^{-10}$	$1/2$	0	0	+1	0	0	-1	$\Sigma^+ \rightarrow N + \pi^+$ $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$ $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$
Ламбда-гиперон	Σ^+	1189,4	2328	$0,8 \cdot 10^{-10}$	$1/2$	+1	0	+1	1	+1	-1	$\Sigma^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$
	Σ^-	1197	2342	$1,6 \cdot 10^{-10}$	$1/2$	-1	0	+1	1	-1	-1	$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$
	Σ^0	1192	2333	$< 10^{-14}$	$1/2$	0	0	+1	1	0	-1	$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 + \pi^-$
Сигма-гипероны	Ξ^+	1321	2585	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$1/2$	-1	0	+1	$1/2$	$-1/2$	-2	$\Xi^0 \rightarrow \Xi^+ + \pi^-$
	Ξ^0	1314	2572	$3 \cdot 10^{-10}$	$1/2$	0	0	+1	$1/2$	$+1/2$	-2	$\Xi^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$
	Ξ^-	1675	3278	$\sim 10^{-10}$	$3/2$	-1	0	+1	0	0	-3	$\Omega^- \rightarrow \Xi^+ + \pi, \Lambda^0 + K^-$
Кси-гипероны	Ω^-											
	Ξ^+											
	Ξ^0											
Омега-гиперон	Ω^-											
	Ξ^+											
	Ξ^0											

Бароны

**V. ПРИСТАВКИ И МНОЖИТЕЛИ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ
ДЕСЯТИЧНЫХ КРАТНЫХ И ДОЛЬНЫХ ЕДИНИЦ
И ИХ НАИМЕНОВАНИЯ**

Наименование	Обозначение	Множитель	Наименование	Обозначение	Множитель
тера	Т	10^{12}	санти	с	10^{-2}
гига	Г	10^9	милли	м	10^{-3}
мега	М	10^6	микро	мк	10^{-6}
кило	к	10^3	нано	н	10^{-9}
гекто	г	10^2	пико	п	10^{-12}
дека	да	10^1	фемто	ф	10^{-15}
деци	д	10^{-1}	атто	а	10^{-18}

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Пе- риод	Ряд	Группы				
		I	II	III	IV	V
1	1	H 1 1,00797 водород				
2	2	Li 3 6,939 литий	Be 4 9,0122 бериллий	B 5 10,811 бор	C 6 12,01115 углерод	N 7 14,0067 азот
3	3	Na 11 22,9898 натрий	Mg 12 24,31 магний	Al 13 26,9815 алюминий	Si 14 28,086 кремний	P 15 30,9738 фосфор
4	4	K 19 39,102 калий	Ca 20 40,08 кальций	21 Sc 44,956 скандий	22 Ti 47,90 титан	23 V 50,942 ванадий
	5	29 Cu 63,546 медь	30 Zn 65,37 цинк	Ga 31 69,72 галлий	Ge 32 72,59 германий	As 33 74,92 мышьяк
5	6	Rb 37 85,47 рубидий	Sr 38 87,62 стронций	39 Y 88,905 иттрий	40 Zr 91,22 цирконий	41 Nb 92,906 ниобий
	7	47 Ag 107,868 серебро	48 Cd 112,40 кадмий	In 49 114,82 индий	Sn 50 118,69 олово	Sb 51 121,75 сурьма
6	8	Cs 55 132,905 цезий	Ba 56 137,34 барий	57 La 138,91 лантан	72 Hf 178,49 гафний	73 Ta 180,95 тантал
	9	79 Au 196,967 золото	80 Hg 200,59 ртуть	Tl 81 204,37 таллий	Pb 82 207,19 свинец	Bi 83 208,98 висмут
7	10	Fr 87 (223) франций	Ra 88 (226) радий	89 Ac (227) актиний	Ku 104 (260) курчатовий	

* Лантаноиды

58 Ce 140,12 церий	59 Pr 140,91 празеодим	60 Nd 144,24 неодим	61 Pm (145) прометий	62 Sm 150,35 самарий	63 Eu 151,96 европий	64 Gd 157,25 гадолний
65 Tb 158,92 тербий	66 Dy 162,50 диспрозий	67 Ho 164,93 гольмий	68 Er 167,26 эрбий	69 Tm 168,93 тулий	70 Yb 173,04 иттербий	71 Lu 174,97 лютеций

Целое число в скобках — массовое число наиболее устойчивого радиоизотопа.

ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

элементов						
VI	VII	VIII			0	
					He 2 4,0026 гелий	
O 8 15,9994 кислород	F 9 18,9984 фтор				Ne 10 20,183 неон	
S 16 32,064 сера	Cl 17 35,453 хлор				Ar 18 39,948 аргон	
24 Cr 51,996 хром	25 Mn 54,938 марганец	26 Fe 55,847 железо	27 Co 58,933 кобальт	28 Ni 58,71 никель		
Se 34 78,96 селен	Br 35 79,90 бром				Kr 36 83,80 криптон	
42 Mo 95,94 молибден	43 Tc (99) технеций	44 Ru 101,07 рутений	45 Rh 102,905 родий	46 Pd 106,4 палладий		
Te 52 127,60 теллур	I 53 126,904 йод				Xe 54 131,30 ксенон	
74 W 183,85 вольфрам	75 Re 186,2 рений	76 Os 190,2 осмий	77 Ir 192,2 иридий	78 Pt 195,09 платина		
Po 84 (210) полоний	At 85 (210) астат				Rn 86 (222) радон	

** Актиноиды

90 Th 232,038 торий	91 Pa (231) протактиний	92 U 238,03 уран	93 Np (237) нептуний	94 Pu (242) плутоний	95 Am (243) америций	96 Cm (247) кюрий
97 Bk (247) берклий	98 Cf (249) калифорний	99 Es (254) эйнштейний	100 Fm (253) фермий	101 Md (256) менделевий	102 (No) (256) (нобеллий)	103 Lr (257) лоуренсий

Станислав Миронович Козел
Эммануил Иосифович Рашба
Сергей Анатольевич Славатинский

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ
Задачи МФТИ

М., 1978 г., 192 стр. с илл.

Редактор *Б. С. Беликов*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *Г. В. Подвольская*

ИБ № 2158

Сдано в набор 16.03.78. Подписано к печати 03.08.78.
Бумага 84×108^{1/32}, тип. № 3. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Услови. печ. л. 10,08. Уч.-изд. л. 9,24.
Тираж 130 000 экз. Заказ № 1852. Цена книги 30 коп.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.